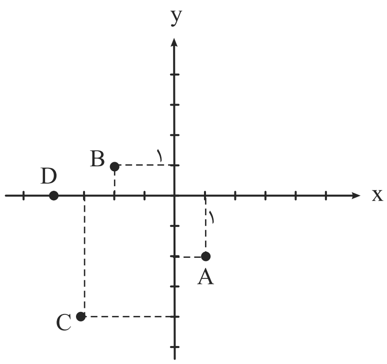
فصل پنجم
معادلات درجه‌ی
اول و معادله‌ی خط

۵-۱: دستگاه مختصات

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱)



پاسخ ۲) $A(۲,۵)$، $B(-۵,-۲)$، $C(۵,-۴)$ و $D(-۲,۲)$

پاسخ ۳) باید عرض نقطه‌ی A، برابر صفر باشد پس $m-۳=۰$ که در نتیجه $m=۳$.

پاسخ ۴) باید طول نقطه‌ی B، برابر صفر باشد که در نتیجه $m=۵$

پاسخ ۵) $A(۰,۳)$ و $B(۵,۰)$

پاسخ ۶) ابتدا معادله‌ی $۱+۲+۳+...+n=۳۶$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n(n+۱)=۷۲=۸\times۹\Rightarrow n=۸$$

پس این متحرک ۸ مرحله حرکت کرده است. حال به تعیین مکان این متحرک می‌پردازیم:

حرکت افقی: $-۱+۰+۳+۰-۵+۰+۷+۰=۴$

حرکت عمودی: $۰-۲+۰+۴+۰-۶+۰+۸=۴$

پس مکان نهایی متحرک، نقطه‌ی $(۴,۴)$ است.

پاسخ ۷) و $A_۴$ در ربع دوم، $A_۲$ برروی محور xها در مرز بین ربع اول و ربع چهارم، $A_۳$ در ربع سوم و $A_۵$ در ربع اول است.

پاسخ ۸) از رابطه‌ی $a=-۳b$ می‌توان فهمید که مقادیر a و b دارای علامت‌های متفاوت هستند (یکی مثبت است و دیگری منفی!) پس نقطه‌ی $A(a,b)$ در ربع دوم یا چهارم است.

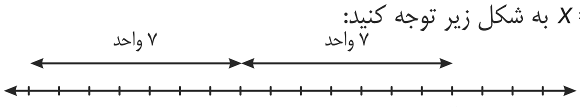
پاسخ ۹) با توجه به این‌که نقطه‌ی A در ربع اول است می‌توان فهمید مقادیر a و b مثبت هستند پس می‌توان نوشت:

الف) نقطه‌ی $B(-a,b)$ در ربع دوم است. (زیرا $-a$ منفی است و b مثبت)

ب) نقطه‌ی $C(-a,-b)$ در ربع سوم است.

پ) نقطه‌ی $D(a,-b)$ در ربع چهارم است.

پاسخ ۱۰) دو نقطه، با موقعیت خواسته شده وجود دارد. نقاط $x=-۱۲$ و $x=۲$ به شکل زیر توجه کنید:



پاسخ ۱۱) بی‌شمار نقطه با این ویژگی می‌توان یافت به عنوان مثال نقاط $(۱,۰)$ و $(-۲,۰)$ یا $(-۱,۰)$ و $(۰,۲)$ یا $(۲/۵,۰)$ و $(-۰/۵,۰)$ یا ... نمونه‌ای از این نقاط هستند.

پاسخ ۱۲) $\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۳^۲}=۱۳$

پاسخ ۱۳) $AB=\sqrt{(۲-۶)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$

پاسخ ۱۴) $AB=\sqrt{۲۰}\Rightarrow\sqrt{(t-۰)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۲۰}\xrightarrow{۲\cdot H/4U} t^۲+۱۶=۲۰\Rightarrow t^۲=۴\Rightarrow t=۲,\ t=-۲$

پاسخ ۱۵) **الف)**

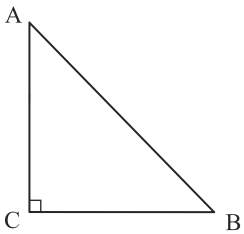
$AB=\sqrt{(۳+۲)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶}$

$AC=\sqrt{(۳+۲)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$

$BC=\sqrt{(۳-۳)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱}=۱$

ب) با توجه به این‌که $۱^۲+۵^۲=\sqrt{۲۶}^۲$ می‌توان دریافت در مثلث ABC رابطه‌ی $AB^۲=AC^۲+BC^۲$ (فیثاغورث) برقرار است. پس این مثلث در رأس C قائمه است.

پ) با توجه به این‌که مثلث در رأس C قائمه است (شکل مقابل) مساحت برابر است با:



$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\times AC\times BC=\frac{۱}{۲}\times۵\times۱=\frac{۵}{۲}$$

پاسخ ۱۶) نقطه‌ی مورد نظر را به صورت $B(x,۰)$ در نظر می‌گیریم. (توجه کنید که اگر نقطه‌ای روی محور xها قرار داشته باشد، عرض آن برابر صفر است.) حال می‌توان نوشت:

$$AB=۵\Rightarrow\sqrt{(x-۳)^۲+(۰+۴)^۲}=۵\xrightarrow{۲\cdot H/4U}(x-۳)^۲+۱۶=۲۵\Rightarrow(x-۳)^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۳\Rightarrow x=۶\\ x-۳=-۳\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

بنابراین مسأله دو جواب دارد.

پاسخ ۱۷) نقطـه‌ی مـورد نظـر را $B(۰,y)$ در نظـر می‌گیریم. (توجه کنید که اگر نقطه‌ای برروی محور yها قرار داشـته باشـد، طول آن برابر صفر است.) پس می‌توان نوشت:

$$AB=۲\Rightarrow\sqrt{(۳-۰)^۲+(۴-y)^۲}=۲\xrightarrow{۲\cdot H/4U}۹+(۴-y)^۲=۴\Rightarrow(۴-y)^۲=-۵$$

در معادله‌ی بالا، طرف راست منفی است در حالی که طرف چپ نامنفی است. پس این معادله جواب ندارد.

پاسخ ۱۸) ابتدا طول اضلاع مثلث را حساب می‌کنیم:

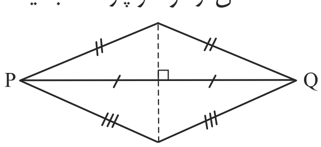
AB Í±ò Ï¼ö $=\sqrt{(۰-(-۳))^۲+(۲-(-۱))^۲}=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$

BC Í±ò Ï¼ö $=\sqrt{(-۳-(-۴))^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۱^۲+۴^۲}=\sqrt{۱۷}$

AC Í±ò Ï¼ö $=\sqrt{(-۴-۰)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۴^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۷}$

با توجه به این‌که BC AC می‌توان فهمید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است، همچنین محیط مثلث برابر است با: $۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱۷}$

پاسخ ۱۹) با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان فهمید، اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین کافی است فاصله‌ی هریک از نقاط A و B را از P و Q حساب کنیم.



۱- محاسبه‌ی طول AP و AQ:

$AP=\sqrt{(۵+۲)^۲+(-۷+۱)^۲}=\sqrt{۸۵}$

$$AQ = \sqrt{(۵-۱۲)^۲ + (-۷+۱)^۲} = \sqrt{۸۵}$$

در نتیجه A روی عمودمنصف پاره‌خط PQ قرار دارد.

۲- محاسبه‌ی طول BP و BQ:

$$BP = \sqrt{(۶+۲)^۲ + (۸+۱)^۲} = \sqrt{۱۴۵}$$

$$BQ = \sqrt{(۶-۱۲)^۲ + (۸+۱)^۲} = \sqrt{۱۱۷}$$

با توجه به این‌که طول پاره‌خط‌های BP و BQ مساوی نیست، می‌توان گفت B روی عمود منصف PQ قرار ندارد.

پاسخ ۲۰ نقطه‌ی مورد نظر را به‌صورت $A(a,b)$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسأله می‌توان نوشت:

$$OA=\sqrt{۸}\Rightarrow\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۸}\xrightarrow{2\cdot}a^۲+b^۲=۸$$

$$AB=\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{a^۲+(b-۴)^۲}=\sqrt{۳}\xrightarrow{۲\cdot}a^۲+b^۲-۸b+۱۶=۳$$

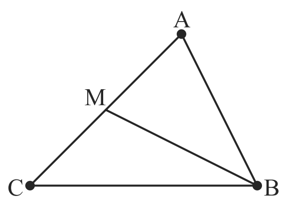
با کم کردن دو تساوی فوق خواهیم داشت:

$$۸b-۱۶=۵\Rightarrow b=\frac{۲۱}{۸}$$

با جای‌گذاری مقدار b در معادله‌ی اول خواهیم داشت:

$$a^۲+(\frac{۲۱}{۸})^۲=۸\Rightarrow a^۲=۸-\frac{۴۴۱}{۶۴}=\frac{۵۱۲-۴۴۱}{۶۴}=\frac{۷۱}{۶۴}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{۷۱}}{۸}$$

پاسخ ۲۱ شکل تقریبی مقابل را در نظر بگیرید، همان‌طور که می‌بینید برای محاسبه‌ی طول میانه‌ی BM باید مختصات نقطه‌ی M (وسط AC) را بیابیم. به راحتی می‌توان فهمید $M(-۱,۳)$ پس طول BM برابر است با:



$$BM=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

پاسخ ۲۲ مختصات وسط پاره‌خط AB به صورت $(\frac{۷+۱}{۲},\frac{-۳-۵}{۲})$، یا به طور ساده‌تر $(۴,-۴)$ است.

پاسخ ۲۳ با توجه به صورت مسأله می‌توان دریافت کافه نقطه‌ی وسط پاره‌خط واصل بین منازل حسام و علی است. در نتیجه مختصات کافه برابر با $(\frac{۱۷+۷}{۲},\frac{۲۷+۳}{۲})$ یا $(۱۲,۱۵)$ می‌باشد.

پاسخ ۲۴ مختصات نقطه‌ی B را به‌صورت (x_B,y_B) در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow۳=\frac{۴+x_B}{۲}\Rightarrow۶=۴+x_B\Rightarrow x_B=۲$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow۴=\frac{۷+y_B}{۲}\Rightarrow۸=۷+y_B\Rightarrow y_B=۱$$

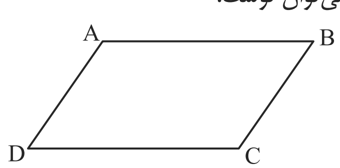
پاسخ ۲۵ ابتدا مختصات نقطه‌ی M (وسط AB) را می‌یابیم:

$$M\ \text{RI~Ïh¶}=(\frac{۷-۱}{۲},\frac{۸+۰}{۲})=(۳,۴)$$

حال می‌توان مختصات نقطه‌ی N، وسط پاره خط BM را به صورت زیر یافت:

$$N\ \text{RI~Ïh¶}=(\frac{-۱+۳}{۲},\frac{۰+۴}{۲})=(۱,۲)$$

پاسخ ۲۶ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (در شکل مقابل رسم شده است) AC و BD قطر هستند، پس می‌توان نوشت:

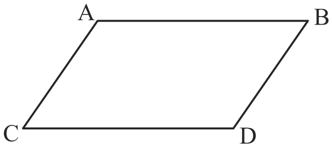


$$AC\ \text{ôw»}=BD\ \text{ôw»}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}\\ \frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow۳-۷=-۱+a\Rightarrow a=-۳\\ y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow۵+۰=۲+b\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

پس مختصات نقطه‌ی D به صورت $(-۳,۳)$ است.

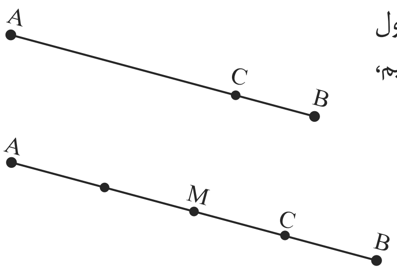
پاسخ ۲۷) در متوازی‌الاضلاع $ABDC$ (در شکل مقابل رسم شده است) AD و BC قطر هستند، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} x_A+x_D=x_B+x_C \Rightarrow ۳+a=-۱-۷ \Rightarrow a=-۱۱ \\ y_A+y_D=y_B+y_C \Rightarrow ۵+b=۰+۲ \Rightarrow b=-۳ \end{cases}$$

پاسخ ۲۸) بـا کمـی دقت متوجه می‌شـویم که بین مختصات این نقاط رابطه‌ی $\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$ برقرار اسـت، پـس این نقاط، مربوط به رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند (AC و BD قطر هستند).

پاسخ ۲۹) اگر شـکل روبه‌رو را به‌طور تقریبی رسـم کنیم، با توجه به این‌که طول AC، سـه برابر طول BC است می‌توان دریافت که اگر پاره‌خط AB را به چهار قسمت مساوی مطابق شکل دوم تقسیم کنیم، می‌توانیم مختصات نقطه‌ی C را در وسط BM بیابیم:

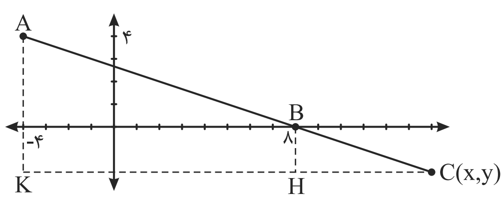


$$M \text{ RI~Th¶} = (\frac{-۴+۸}{۲}, \frac{۴+۰}{۲}) = (۲,۲)$$

$$BM \text{ ôw»} = C = (\frac{۲+۸}{۲}, \frac{۲+۰}{۲}) = (۵,۱)$$

یادداشت: **همان‌طور که ملاحظه می‌کنید رسم کردن شکل‌های تقریبی به فهم بهتر مسأله کمک می‌کند.**

پاسخ ۳۰) با توجه به شکل مقابل و طبق قضیه‌ی تالس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} \frac{BH}{AK}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BH}{۴+BH}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳BH=۴+BH \Rightarrow BH=۲ \\ \frac{CH}{CK}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{CH}{CH+۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳CH=CH+۱۲ \Rightarrow CH=۶ \end{cases}$$

پس مختصات نقطه‌ی C به صورت $(+۱۴,-۲)$ است.

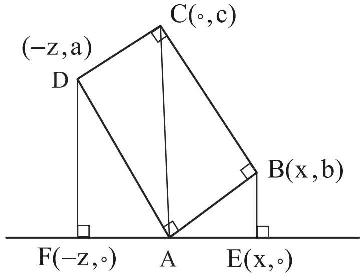
پاسخ ۳۱) می‌دانیم مساحت مثلث ABO برابر ۱۲ می‌باشد در نتیجه مساحت هر یک از مثلث‌های OPA ، OPB و APB برابر ۴ می‌باشد مساحت مثلث‌های OPB و OPA را حساب می‌کنیم:

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{OPA} = \frac{-۱}{۲} x_P.OA = -۳x_P = ۴ \Rightarrow x_P = -\frac{۴}{۳}$$

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{OPB} = \frac{۱}{۲} y_P.OB = ۲y_P = ۴ \Rightarrow y_P = ۲$$

پس مختصات این نقطه برابر $(-\frac{۴}{۳},۲)$ می‌باشد.

پاسخ ۳۲) نقطـه‌ی A را به عنـوان مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم. در نتیجه مختصات نقاط B، C، D، F و E به شکل زیر تعیین می‌شود. با فرض $AE=x$، مختصات نقطه‌ی B را نشان می‌دهیـم، در نتیجـه مختصـات نقطه‌ی E به صورت $(x,۰)$ می‌باشـد. از آن‌جا که نقطه‌ی C روی محور yها قرار گرفته، مختصات آن به صورت $(۰,c)$ می‌باشـد. با اسـتدلالی مشـابه آن‌چه درباره‌ی نقاط B و E به کار گرفتیم می‌توان مختصات نقطه‌ی D را به صورت $(-z,a)$ و مختصات F را به صورت $(-z,۰)$ نشان داد.



اکنون با توجه به مستطیل (و در نتیجه متوازی‌الاضلاع بودن) چهارضلعی $ABCD$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{x_B + x_D}{۲} \\ \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{y_B + y_D}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰ + ۰ = x - z \Rightarrow x = z \\ ۰ + c = b + a \Rightarrow c = a + b \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان گفت $x = |AF| = |AE|$ و $|AC| = a + b$. اکنون می‌توانیم طول پاره‌خط‌های BC و AB را حساب کنیم.

$$AB\ \text{ô i ½nlQ Ï¼ö} = \sqrt{x^۲ + b^۲} \quad , \quad BC\ \text{ô i ½nlQ Ï¼ö} = \sqrt{x^۲ + a^۲}$$

در نتیجه طبق رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث می‌توان نوشت:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow (a+b)^۲ = x^۲ + b^۲ + x^۲ + a^۲ \Rightarrow x^۲ = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

از این‌رو EF برابر با $۲\sqrt{ab}$ خواهد بود.

پاسخ ۳۳) ابتدا مساحت چهارضلعی $OMLK$ را حساب می‌کنیم، توجه کنید که این چهارضلعی، ذوزنقه‌ای قائم می‌باشد در نتیجه مساحت آن برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}(OM + KL) \times OK = \frac{۱}{۲}(۶ + ۱۰) \times ۸ = ۶۴$$

از این رو طبق فرض مسأله می‌توان فهمید، مساحت هر مثلث داخلی برابر $۱۶ = \frac{۱}{۴}(۶۴)$ خواهد بود. اکنون مساحت مثلث‌های POM و KPL را حساب می‌کنیم، توجه کنید که طول ارتفاع وارد بر ضلع OM از مثلث POM برابر با عرض نقطه‌ی P که آن‌را با d نمایش می‌دهیم، است. و طول ارتفاع وارد بر ضلع KL از مثلث KPL برابر با $۸ - d$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$POM\ \text{W±X¶ Selv¶} = \frac{۱}{۲} \times d \times ۶ = ۳d = ۱۶ \Rightarrow d = \frac{۱۶}{۳}$$

حال مساحت مثلث KPL را حساب می‌کنیم:

$$KPL\ \text{W±X¶ Selv¶} = \frac{۱}{۲}(۸ - d) \times KL = \frac{۱}{۲}(۸ - \frac{۱۶}{۳}) \times ۱۰ = ۵ \times \frac{۸}{۳} = \frac{۴۰}{۳} \neq ۱۶$$

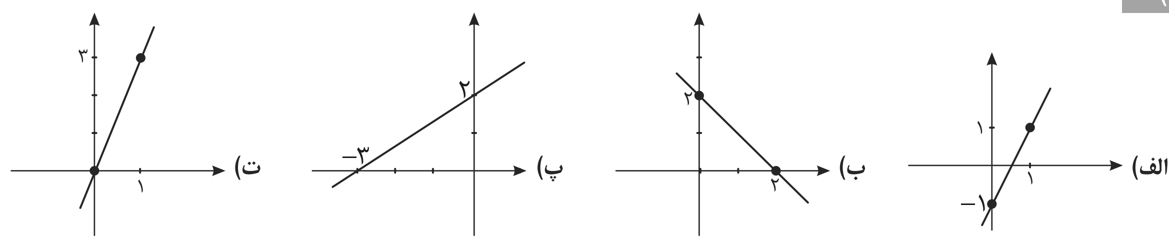
با توجه به این که مساحت مثلث KPL برابر $\frac{۴۰}{۳}$ گردید می‌توان فهمید، چنین نقطه‌ای داخل چهارضلعی وجود ندارد.

فصل پنجم
معادله‌ی درجه‌ی اول ومعادله‌ی خط

۵ــ۲: معادله‌ی خط

پاسخ‌های تشریحی

پاسخ ۱)



پاسخ ۲) نقاط $(۰,۲)$ و $(۳,۰)$ روی خط واقع هستند.

پاسخ ۳)

$$۲x+ay=۷ \xrightarrow{x=۲,y=-۱} ۴-a=۷ \Rightarrow a=-۳$$

پاسخ ۴)

$$\text{الف)}\ ۴x-۲y=-۸ \Rightarrow \begin{cases} \text{ÇkL¶ pH Ï¼ö} : y=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ \text{ÇkL¶ pH Æoø} : x=۰ \Rightarrow y=۴ \end{cases}$$

$$\text{ب)}\ ۵y-۲x=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{ÇkL¶ pH Ï¼ö} : y=۰ \Rightarrow x=-۵ \\ \text{ÇkL¶ pH Æoø} : x=۰ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

$$\text{پ)}\ \frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۲}y=۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{ÇkL¶ pH Ï¼ö} : y=۰ \Rightarrow x=۴ \\ \text{ÇkL¶ pH Æoø} : x=۰ \Rightarrow y=-۶ \end{cases}$$

پاسخ ۵)

$$۳a+۱=۵ \Rightarrow ۳a=۴ \Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

پاسخ ۶)

$$۲ax+(a-۱)y=۵ \xrightarrow{x=۳,y=۰} ۶a+۰=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۶}$$

پاسخ ۷)

$$\text{شیب}=\frac{۳۲-۱۶}{۳۶-۱۲}=\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۲}{۳}$$

پاسخ ۸) همان‌طور که می‌دانید، شیب خط برابر با میزان تغییرات y خط در ازای ۱ واحد تغییر x خط می‌باشد. حال با توجه به صورت مسأله می‌توان فهمید، در ازای ۱ واحد تغییر طول (رفتن به نقطه‌ی بعدی) عرض خط حرکت خرگوش ۲ واحد تغییر می‌کند، از این رو می‌توان گفت شیب این خط برابر ۲ می‌باشد.

پاسخ ۹) ابتدا دو نقطه از خطوط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ را مشخص می‌کنیم و به کمک قاعده‌ی محاسبه‌ی شیب خط، شیب خط گذرنده از این دو نقطه را مشخص خواهیم کرد:

خط $l_۱$ از نقاط $(۲,۰)$ و $(۴,۴)$ می‌گذرد. در نتیجه شیب آن برابر با $۲=\frac{۴-۰}{۴-۲}$ است.

خط $l_۲$ از نقاط $(-۱,۲)$ و $(۰,۰)$ می‌گذرد در نتیجه می‌توان فهمید شیب آن برابر -۲ است.

خط $l_۳$ از نقاط $(۴,۴)$ و $(-۴,۰)$ می‌گذرد پس شیب آن برابر $\frac{۱}{۲}=\frac{۴-۰}{۴-(-۴)}$ است.

پاسخ ۱۰)

$$۲a+۳=۷ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

پاسخ ۱۱) ابتدا معادله‌های (الف)، (ب) و (پ) را ساده می‌کنیم، سپس طول از مبدأ و عرض از مبدأ را حساب می‌کنیم:

الف) $y-۵=۸(x+۱) \Rightarrow y=۸x+۸+۵ \Rightarrow y=۸x+۱۳$

بنابراین می‌توان گفت شیب این خط برابر ۸، عرض از مبدأ آن ۱۳ و طول از مبدأ آن $\frac{-۱۳}{۸}$ است که این وضعیت مطابق با نمودار (۳) است.

ب) $۳x+۴y=۲۰ \Rightarrow ۴y=-۳x+۲۰ \Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+۵$

بنابراین این خط دارای شیب $-\frac{۳}{۴}$، عرض از مبدأ ۵ و طول از مبدأ $+\frac{۲۰}{۳}$ می‌باشد که این وضعیت مطابق با نمودار (۱) است.

پ) $۶x-۱۵=۲y-۳ \Rightarrow ۲y=۶x-۱۵+۳=۶x-۱۲ \Rightarrow y=۳x-۶$

بنابراین شیب این خط برابر ۳، عرض از مبدأ آن -۶ و طول از مبدأ آن ۲ می‌باشد که این وضعیت مطابق با نمودار (۲) است.

پاسخ ۱۲) شیب خط m، برابر ۲ و شیب خط k، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. شیب خط l، برابر $-\frac{۳}{۴}$ است.

پاسخ ۱۳)

الف) $l_۱$ ب) $l_۳$ پ) $l_۲$ ت) $l_۴$

پاسخ ۱۴)

الف) $l_۴$ ب) خطوط $l_۱$ و $l_۲$ دارای شیب مثبت هستند.

پاسخ ۱۵) $y-۴=\sqrt{۲}(x+۲)$

پاسخ ۱۶) $y=۵x-۲$

پاسخ ۱۷) با توجه به شکل می‌توان فهمید خط $l_۱$ از نقاط $(\ ۱,۲)$ و $(۳,۵)$ می‌گذرد. همچنین خط $l_۲$ از نقاط $(-۱,۲)$ و $(۳,-۱)$ عبور می‌کند.

در نتیجه برای یافتن معادله‌ی خطوط $l_۱$ و $l_۲$ ابتدا شیب خطوط را حساب کرده، سپس به محاسبه‌ی معادله‌ی آن‌ها می‌پردازیم:

شیب خط $l_۱$ برابر با $\frac{۳}{۴}=\frac{۵-۲}{۳-(-۱)}$ می‌باشد. در نتیجه معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ با شیب $\frac{۳}{۴}$ برابر است با: $y=۲+\frac{۳}{۴}(x+۱)$

شیب خط $l_۲$ برابر با $-\frac{۳}{۴}=\frac{۲-(-۱)}{-۱-۳}$ بوده و از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ می‌گذرد. از این رو معادله‌ی آن برابر است با: $y=۲-\frac{۳}{۴}(x+۱)$

پاسخ ۱۸) ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را می‌نویسیم:

شیب $AB=\frac{۵-۷}{۰-۲}=۱ \Rightarrow$ معادله‌ی AB: $y-۵=۱(x-۰) \Rightarrow y=x+۵ \Rightarrow$ عرض از مبدأ $=۵$ و طول از مبدأ $=-۵$

پاسخ ۱۹) **راه‌حل اول:** با توجه به صورت مسأله می‌توان دریافت نقطه‌ی A متعلق به هر دو خط می‌باشد. در نتیجه با توجه به معلوم بودن شیب هر دو خط می‌توان معادله‌ی آن‌ها را یافت:

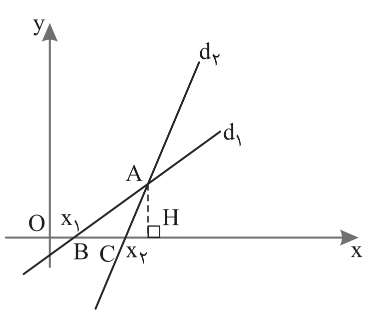
معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی A، با شیب ۳ برابر با $y-۱۵=۳(x-۱۰)$ یا $y=۳x-۱۵$ است.

معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی A، با شیب ۵ برابر با $y-۱۵=۵(x-۱۰)$ یا $y=۵x-۳۵$ است.

طول از مبدأ خط $y=۳x-۱۵$ برابر ۵ و طول از مبدأ خط $y=۵x-۳۵$ برابر ۷ می‌باشد. در نتیجه اختلاف میان طول از مبدأها برابر $۷-۵=۲$ می‌باشد.

راه‌حل دوم: در شکل زیر وضعیت تقریبی دو خط رسم شده است. در این شکل خط $d_۱$، شیبی برابر ۳ و خط $d_۲$ شیبی برابر ۵ دارد. نقطه‌ی $B(x_۱,۰)$ نقطه‌ی برخورد خط $d_۱$ با محور xها و نقطه‌ی $C(x_۲,۰)$ نقطه‌ی برخورد خط $d_۲$ با محور xها می‌باشد. حال با توجه به این‌که شیب خط $d_۱$ برابر ۳ می‌باشد می‌توان فهمید شیب خط گذرنده از نقاط A و B نیز برابر ۳ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱۵-۰}{۱۰-x_۱}=۳ \Rightarrow x_۱=۵$$



با استدلالی مشابه می‌توان فهمید شیب خط گذرنده از نقاط A و C برابر ۵ می‌باشد. از این رو می‌توان گفت: $\frac{۱۵-۰}{۱۰-x_۲}=۵ \Rightarrow x_۲=۷$

بنابراین طول از مبدأ خط $d_۱$ برابر ۵ و طول از مبدأ خط $d_۲$ برابر ۷ می‌باشد.

پاسخ ۲۰) AB شیب $=BC$ شیب $\Rightarrow \frac{۲-۱}{۱+۳}=\frac{۱-۷}{-۳-a-۱} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۶}{۴+a} \Rightarrow ۴+a=۲۴ \Rightarrow a=۲۰$

پاسخ ۲۱) **راه‌حل اول:** مختصات نقطه‌ی A را با (x_A,y_A) و مختصات نقطه‌ی B را با (x_B,y_B) نشان می‌دهیم. از آن‌جا که فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و برابر $۳\sqrt{۱۷}$ می‌باشد می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=۳\sqrt{۱۷} \qquad (۱)$$

همچنین از آن‌جا که نقاط A و B روی خط $y-۴x=۳$ واقع هستند می‌توان فهمید شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر شیب خط $y-۴x=۳$ یعنی ۴ می‌باشد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

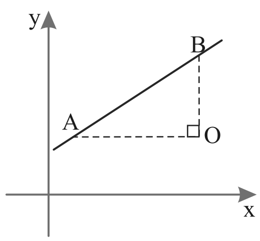
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=۴ \qquad (۲)$$

به کمک رابطه‌ی (۲) می‌توان فهمید $y_B-y_A=۴(x_B-x_A)$. حال با جای‌گذاری این عبارت در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\sqrt{(y_B-y_A)^۲+(x_B-x_A)^۲}=\sqrt{(۴(x_B-x_A))^۲+(x_B-x_A)^۲}=\sqrt{(۴^۲+۱)(x_B-x_A)^۲}=|x_B-x_A|\sqrt{۱۷}$$

در نتیجه می‌توان فهمید $|x_B-x_A|=۳$ یا به طور ساده‌تر اختلاف طول دو نقطه‌ی A و B برابر ۳ می‌باشد.

راه‌حل دوم: در شکل روبه‌رو دو نقطه‌ی دلخواه A و B روی خط $y=۴x+۳$ رسم شده‌اند:



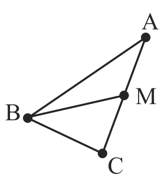
می‌دانیم $AB=۳\sqrt{۱۷}$ و نیز با توجه به شیب خط، $\frac{OB}{OA}=۴$. حال هدف ما یافتن مقدار عددی OA می‌باشد. به کمک رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث AOB می‌توان فهمید:

$$AB^۲=OB^۲+OA^۲ \xrightarrow{OB=۴OA} AB^۲=۱۷OA^۲$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$AB=۳\sqrt{۱۷}=OA\sqrt{۱۷} \Rightarrow OA=۳$$

پاسخ ۲۲) با توجه به شکل مقابل میانه‌ی وارد بر ضلع AC از دو نقطه‌ی B و M (وسط AC) می‌گذرد. مختصات M برابر است با:



$$M(\frac{۵+۱}{۲},\frac{۹+۱}{۲})$$

حال معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $B(-۳,-۵)$ و $M(۳,۵)$ را می‌نویسیم:

BM شیب خط $=\frac{۵-(-۵)}{۳-(-۳)}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}$

BM معادله‌ی خط: $y-۵=\frac{۵}{۳}(x-۳)$

پاسخ ۲۳) ابتدا مقدار $D=۲۰۰$ را در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$C=۰/۰۴۱۷\times ۲۰۰(۱+a)=۸/۳۴(۱+a)=۸/۳۴a+۸/۳۴$$

حال به بررسی قسمت‌های (الف)، (ب) و (پ) می‌پردازیم.

الف) شیب خط به معادله‌ی $C=۸/۳۴a+۸/۳۴$ برابر ۸/۳۴ می‌باشد و این عدد به این معنی است که اگر کودک ۱ سال بزرگ‌تر شود میزان مصرف تجویزی پزشک ۸/۳۴ میلی‌گرم بیش‌تر می‌شود.

ب) باید مقدار C به ازای $a=۰$ یا همان عرض از مبدأ خط را حساب کنیم که برابر ۸/۳۴ می‌باشد و این تفسیر عینی عرض از مبدأ است.

پ) برای این امر باید معادله‌ی $C=D$ را حل کنیم:

$$D=۰/۰۴۱۷\times D(۱+a) \Rightarrow ۱=۰/۰۴۱۷(۱+a) \Rightarrow ۱+a=\frac{۱}{۰/۰۴۱۷}\simeq ۲۳/۹ \Rightarrow a\simeq ۲۲/۹$$

یعنی حدود ۲۳ سالگی میزان مصرف دارو برای فرد برابر میزان مصرف بزرگ‌سالان خواهد بود.

۵-۳: روابط خطی

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱) **الف)** خطی است، معادله‌ی خط به صورت $y=-2x+12$ می‌باشد.
ب) خطی نیست.

پاسخ ۲) رابطه‌ی مورد نظر باید از نقاط $(0,1000)$ و $(10,995)$ بگذرد. پس شیب این خط برابر $\frac{-5}{10}=\frac{1000-995}{0-10}$ است و معادله‌ی حجم آب باقی‌مانده (V) برحسب زمان (t) برابر است با:

$$V-1000=\frac{-1}{2}(t-0)\Rightarrow V=\frac{-1}{2}t+1000$$

پاسخ ۳) با فرض خطی بودن رابطه‌ی T برحسب h می‌توان فهمید، نقاط $(0,20)$ و $(1,10)$ روی این خط قرار دارند، در نتیجه شیب این خط برابر $-10=\frac{20-10}{0-1}$ خواهد بود. از این رو معادله‌ی این خط به صورت $T=20-10(h-0)=20-10h$ می‌باشد. که بیانگر خطی با عرض از مبدأ ۲۰ و طول از مبدأ ۲ می‌باشد. بنابراین نمودار گزینه‌ی (۲) درست است.

یادداشت: **به این نکته‌ی ظریف توجه کنید که در گزینه‌ی (۳) نمودار h برحسب T رسم شده است، نه T برحسب h!**

پاسخ ۴) **الف)** با توجه به شکل می‌توان فهمید نمودار این خط از نقاط $(15,1680)$ و $(25,1970)$ می‌گذرد در نتیجه شیب این خط برابر: $29=\frac{1970-1680}{25-15}$ است. از این‌رو معادله‌ی این خط به صورت زیر می‌باشد.

$$w-1680=29(t-15)\Rightarrow w=29t+1245$$

ب) شیب این منحنی به معنای این است که سالانه ۲۹ نفر به تعداد فارغ‌التحصیلان دختر این دانشکده افزوده می‌شود.
پ) کافی است مقدار w را به ازای $t=1395-1360=35$ بیابیم:

$$w=29\times35+1245=2260$$

بر طبق این مدل پیش‌بینی می‌شود، تعداد فارغ‌التحصیلان دختر این دانشکده در سال ۱۳۹۵ به ۲۲۶۰ نفر برسد.

پاسخ ۵) **الف)** براساس صورت مسأله می‌توان فهمید نمودار این خط از نقاط $(20,0/75)$ و $(40,0/5)$ می‌گذرد. (میزان درصد را به صورت عددی بین صفر و یک نشان می‌دهیم.) در نتیجه شیب این خط برابر $-\frac{1}{80}=\frac{0/75-0/5}{20-40}$ می‌باشد، در نتیجه معادله‌ی این خط برابر با $c-\frac{1}{2}=-\frac{1}{80}(a-40)$ یا به طور ساده $c=-\frac{1}{80}a+1$ است.

ب) برای محاسبه‌ی قدرت شنوایی در ۳۰ و ۸۰ سالگی، کافی است مقدار c را به ازای $a=30,80$ بیابیم:

$$a=30\Rightarrow c=1-\frac{1}{80}\times30=\frac{5}{8}=0/625$$

$$a=80\Rightarrow c=1-\frac{1}{80}\times80=0$$

پ) براساس این الگوی خطی برای شنوایی افراد، میزان شنوایی افراد در ۸۰ سالگی برابر صفر خواهد بود. حال آن که افراد بسیاری در ۸۰ سالگی از قدرت شنوایی معقولی برخوردار هستند. (یعنی در نظر گرفتن مدل خطی، برای میزان شنوایی با خطا همراه است!)

پاسخ ٦) بـا توجـه بـه وضعیـت شـیر تخلیـه‌ی مخزن می‌تـوان فهمید ۱ لیتر گاز در ۳ سـاعت تخلیه می‌شـود. (و به طـور مشـابه ۱۸۰ لیتر گاز در $۵۴۰=۱۸۰\times۳$ سـاعت تخلیه می‌شـود.) در نتیجه t سـاعت پس از باز شدن شیر $\frac{t}{۳}$ لیتر از حجم مخزن کاسته می‌شود، بنابراین می‌توان گفت:

$$\boxed{\text{حجم گاز درون مخزن}} = \boxed{\text{حجم اولیه}} - \boxed{\text{حجم گازی که پس از t ساعت باز بودن شیر تخلیه شده}}$$

$$V = ۱۸۰ - \frac{t}{۳}$$

در نتیجه نمودار V برحسب t، خطی با عرض از مبدأ ۱۸۰ و شیب $\frac{-۱}{۳}$ می‌باشد.

بنابراین گزینه‌ی (۱) گزینه‌ی درست می‌باشد.

پاسخ ۷) **الف)** در ازای تولید n عدد کالا میزان $n\times۱۷۵۰$، به هزینه‌ی تولید اضافه می‌گردد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\boxed{\text{· I¶¼U n¦qÀ Kveo kÃ²¼U Áí¾¹ÄqÀ}} = \boxed{۵۰۰} + \boxed{۱/۷۵\times n}$$

در نتیجه می‌توان نوشت: $C=۵۰۰+۱/۷۵n$

ب) بـا توجـه بـه این‌کـه قیمت فروش هر واحد کالا ۴ هزار تومان اسـت، در ازای فروش n واحد کالا مبلغ $۴n$ هزار تومان درآمد خواهیم داشـت، در نتیجه می‌توان نوشت: $R=۴n$

پ) با توجه به تعریف P می‌توان فهمید $P=R-C$، در نتیجه کافی است میزان R و C را برحسب n در رابطه جای‌گذاری کنیم:

$$P=R-C=۴n-(۵۰۰+۱/۷۵n)=۲/۲۵n-۵۰۰$$

پاسخ ۸) **الف)** مساحتی از سالن که با ساختن y اتاق کوچک اشغال می‌شود برابر $۲۵۰y$ و مساحتی از سالن که با ساختن x اتاق بزرگ اشغال می‌شود برابر $۴۰۰x$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\boxed{\text{¸²lw Selv¶}} = \boxed{\text{¦ a¼¨ ÁlÀ¡ lÚ Selv¶}} + \boxed{\text{©nq ÁlÀ¡ lÚ Selv¶}}$$

$$۱۰۰۰۰ = ۲۵۰\times x + ۴۰۰\times y$$

با تقسیم دو طرف تساوی فوق بر ۵۰ می‌توان نوشت: $۲۰۰=۵x+۸y$

ب) با توجه به رابطه‌ی $۵x+۸y=۲۰۰$ می‌توان دریافت، حداکثر تعداد اتاق‌های کوچک (یا بیش‌ترین مقدار x) وقتی اسـت که مقدار y برابر صفر باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۵x+۸y=۲۰۰ \xrightarrow{y=۰} ۵x=۲۰۰ \Rightarrow x=۴۰$$

پاسخ ۹) **الـف)** بـا توجه به اطلاعات مسـأله، این رابطه‌ی خطی از نقطه‌ی $(۱۰۰۰, ۶۰۰)$ می‌گذرد. بـه ازای ۲۵٪ افزایش قیمت، ۷۵ جعبه از میزان فروش کاسته می‌شود یعنی:

$$\text{قیمت فروش}=۱۰۰۰+\frac{۲۵}{۱۰۰}\times۱۰۰۰=۱۲۵۰\ \text{تومان} \quad،\quad \text{میزان فروش}=۶۰۰-۷۵=۵۲۵\ \text{¾L÷]}$$

پس رابطه‌ی خطی مورد نظر از نقطه‌ی $(۱۲۵۰, ۵۲۵)$ نیز می‌گذرد. پس می‌توان نوشت:

$$\text{¾õn KÃ\{}=\frac{۶۰۰-۵۲۵}{۱۰۰۰-۱۲۵۰}=\frac{۷۵}{-۲۵۰}=\frac{-۳}{۱۰}$$

پس رابطه‌ی خطی مورد نظر به صورت زیر است:

$$y-۶۰۰=\frac{-۳}{۱۰}(x-۱۰۰۰)\Rightarrow y=\frac{-۳}{۱۰}x+۹۰۰$$

ب) باید مقدار y را به ازای $x=۲۰۰۰$ تعیین کنید:

$$y=\frac{-۳}{۱۰}\times(۲۰۰۰)+۹۰۰=۳۰۰\ \text{¾L÷]}$$

پاسخ ۱۰) **الـف)** رابطـه‌ی مـورد نظر از نقاط $(۰, ۲۲/۲)$ و $(۱۰, ۱۲/۲)$ (عدد صفر معادل سـال ۱۹۹۶، عدد یک معـادل ۱۹۹۷، ... و عدد ۱۰ معادل ۲۰۰۶ است.) پس شیب نمودار برابر $\frac{۲۲/۲-۱۲/۲}{۰-۱۰}=-۱$ و معادله‌ی آن برابر است با:

$$y-۲۲/۲=-۱(x-۰)\Rightarrow y=-x+۲۲/۲\ \ (x=۰,۱,۲,\ldots)$$

ب) باید میزان y را به ازای $x=۱۶$ محاسبه کنیم:

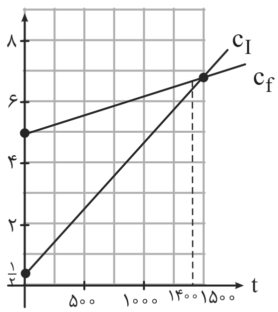
$$y=-۱۶+۲۲/۲=۶/۲$$

پاسخ ۱۱) **الف)** برای حل این مسأله باید معادله‌ی $C_I=C_f$ یا به طور معادل $۵+\frac{۱}{۱۰۰۰}t=\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۱۰۰۰}t$ را حل کنیم:

$$۵+\frac{۱}{۱۰۰۰}t=\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۱۰۰۰}t \Rightarrow \frac{۳}{۱۰۰۰}t=\frac{۹}{۲} \Rightarrow t=۱۵۰۰$$

یعنی پس از ۱۵۰۰ ساعت هزینه‌ی مصرفی دو لامپ یکسان می‌شود.

ب) نمودار دو خط C_f و C_I را در دستگاه زیر رسم کرده‌ایم:



پ) براساس نمودار می‌توان مشاهده کرد برای مقادیر کم‌تر از ۱۵۰۰ ساعت، هزینه‌ی مصرفی لامپ معمولی پایین‌تر از لامپ فلورسنت است و استفاده از آن برای شرکت از لحاظ اقتصادی به صرفه‌تر است:

هزینه‌ی مصرفی لامپ فلورسنت در ازای ۱۴۰۰ ساعت مصرف: $۵+\frac{۱}{۱۰۰۰}\times۱۴۰۰=۵+۱/۴=۶/۴$ (برحسب هزار تومان)

هزینه‌ی مصرفی لامپ معمولی در ازای ۱۴۰۰ ساعت مصرف: $۰/۵+\frac{۴}{۱۰۰۰}\times۱۴۰۰=۰/۵+۵/۶=۶/۱$ (برحسب هزار تومان)

۴-۵: خط‌های موازی و عمود بر هم

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱) با توجه به موازی بودن این خط با خط گذرنده از نقاط $C(\frac{1}{6},1)$ و $D(-1,\frac{10}{3})$ می‌توان دریافت شیب خط گذرنده از A با شیب خط گذرنده از نقاط $C(\frac{1}{6},1)$ و $D(-1,\frac{10}{3})$ یا $-2 = \dfrac{\frac{10}{3}-1}{-1-\frac{1}{6}}$ برابر است.

در نتیجه مسأله به یافتن معادله‌ی خطی محدود می‌شود که از نقطه‌ی $A(5,-7)$ گذشته و شیبی برابر ۲- دارد.

$$y-(-7)=-2(x-5)$$

پاسخ ۲) الف) خط d_1 از نقطه‌ی $(1,2)$ می‌گذرد و با خط $y=-x$ موازی است (پس شیب این خط برابر ۱- است) بنابراین معادله‌ی خط d_1 برابر است با:

$$y-2=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+3$$

ب) خط d_2 از نقطه‌ی $(3,3)$ می‌گذرد و با خط $y=2x$ موازی است، پس معادله‌ی خط d_2 به صورت زیر است:

$$y-3=2(x-3)\Rightarrow y=2x-3$$

پاسخ ۳) الف) ابتدا خط $2x-y=-2$ را به صورت $y=2x+2$ می‌نویسیم پس شیب خط مورد نظر برابر ۲ است و داریم:

$$y-2=2(x+3)\Rightarrow y=2x+8$$

ب) شیب خط مورد نظر برابر $-\frac{11}{2}=\frac{8-(-3)}{3-5}$ است. پس معادله‌ی خطی را می‌خواهیم که از نقطه‌ی $(0,0)$ بگذرد و شیب آن $-\frac{11}{2}$ باشد:

$$y-0=-\frac{11}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{11}{2}x$$

پاسخ ۴) شیب خط گذرنده از نقاط $(2,-4)$ و $(-1,2)$ برابر است با: $-2=\dfrac{2-(-4)}{-1-2}$

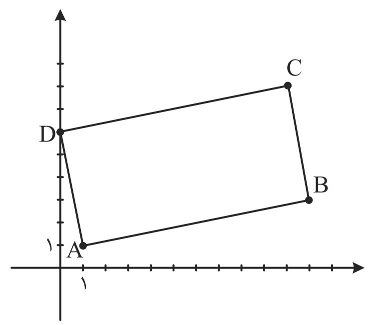
حال خط $(2a-3)x+(3a-1)y=3$ را به صورت $y=\dfrac{-2a+3}{3a-1}x+\dfrac{3}{3a-1}$ می‌نویسیم. پس می‌توان فهمید شیب این خط برابر $\dfrac{-2a+3}{3a-1}$ است.

با توجه به موازی بودن دو خط، می‌توان فهمید شیب آن‌ها برابر است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{-2a+3}{3a-1}=-2\Rightarrow -2a+3=-6a+2\Rightarrow 4a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

پاسخ ۵) می‌دانیم شیب خط $x-2y=7$ برابر با $\frac{1}{2}$ می‌باشد، پس شیب خط مورد نظر برابر با ۲- خواهد بود. حال مسأله به یافتن معادله‌ی خطی به شیب ۲- که از نقطه‌ی A می‌گذرد محدود می‌شود. معادله‌ی این خط برابر است با: $y-4=-2(x+3)$

پاسخ ۶) می‌دانیم شیب خط d_2 برابر با $\frac{-2}{3}$ می‌باشد. در نتیجه شیب خط d_1 برابر با $\frac{3}{2}$ خواهد بود. از طرفی شیب خط $3x=by+2$ برابر با $\frac{3}{b}$ است، در نتیجه می‌توان نوشت: $\frac{3}{2}=\frac{3}{b}\Rightarrow b=2$



پاسخ ۷) **الف)** ابتدا شرط متوازی‌الاضلاع بودن چهارضلعی $ABCD$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_B + x_D = x_C + x_A \\ y_B + y_D = y_C + y_A \end{cases}$$

بنابراین می‌توان فهمید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. حال شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B و شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی B و C را حساب می‌کنیم:

$$AB \text{ شیب } = m_۱ = \frac{۳-۱}{۱۱-۱} = \frac{۱}{۵}$$

$$BC \text{ شیب } = m_۲ = \frac{۸-۳}{۱۰-۱۱} = -۵$$

از آن‌جا که $m_۱m_۲ = -۱$، می‌توان فهمید $ABCD$ مستطیل است.

ب) برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل کافی است طول پاره‌خط‌های AB و BC را حساب کنیم:

$$AB \text{ طول } = \sqrt{(۱۱-۱)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۱۰۴} = ۲\sqrt{۲۶}$$

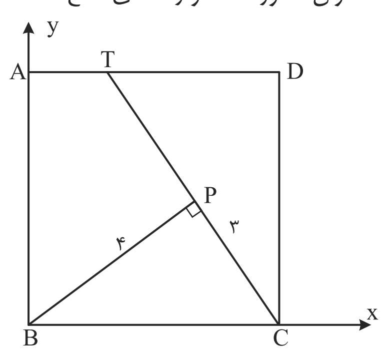
$$BC \text{ طول } = \sqrt{(۱۱-۱۰)^۲ + (۳-۸)^۲} = \sqrt{۲۶}$$

در نتیجه مساحت مستطیل برابر با $AB \times BC = ۲\sqrt{۲۶}\sqrt{۲۶} = ۵۲$ می‌باشد.

پاسخ ۸) راستای پرتاب وزنه، خطی عمود بر خط OA می‌باشد، می‌دانیم معادله‌ی خط OA (بین خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,\ \ ۳)$) برابر $y = \frac{-۳}{۴}x$ می‌باشد. در نتیجه خط پرتاب دارای شیب $\frac{۴}{۳}$ بوده و از نقطه‌ی $(۴,-۳)$ می‌گذرد. بنابراین معادله‌ی این خط برابر $y + ۳ = \frac{۴}{۳}(x-۴)$ یا به طور ساده‌تر $y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۲۵}{۳}$ است. حال می‌توان بررسی کرد که پرتاب از نقطه‌ی $(۱۰۰,۵۰)$ می‌گذرد یا خیر، کافی است مختصات نقطه‌ی $A(۱۰۰,۵۰)$ را در معادله‌ی خط قرار دهیم: $۵۰ \neq \frac{۴}{۳} \times ۱۰۰ - \frac{۲۵}{۳} = \frac{۳۷۵}{۳} = ۱۲۵$

در نتیجه این نقطه در معادله‌ی خط پرتاب صدق نمی‌کند پس پرتاب به هدف نمی‌خورد.

پاسخ ۹) نقطه‌ی B را به عنوان مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم، در نتیجه راستای ضلع BC را به عنوان محور xها و راستای ضلع AB را به عنوان محور yها انتخاب می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث PBC می‌توان دریافت:



$$BC^۲ = PB^۲ + PC^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی C برابر $(۵,۰)$ می‌باشد. با توجه به این‌که BC ضلعی از مربع $ABCD$ است می‌توان دریافت طول اضلاع AB و AD و DC نیز برابر ۵ است و مختصات هر یک از نقاط A و D به ترتیب $A(۰,۵)$ و $D(۵,۵)$ خواهد بود.

حال اگر مختصات نقطه‌ی P را با (x_P, y_P) نمایش دهیم می‌توان چنین نوشت:

$$PB = ۴ \Rightarrow \sqrt{(x_P - ۰)^۲ + (y_P - ۰)^۲} = \sqrt{x_P^۲ + y_P^۲} = ۴ \Rightarrow x_P^۲ + y_P^۲ = ۱۶ \qquad (۱)$$

$$PC = ۳ \Rightarrow \sqrt{(x_P - ۵)^۲ + (y_P - ۰)^۲} = \sqrt{(x_P - ۵)^۲ + y_P^۲} = ۳ \Rightarrow (x_P - ۵)^۲ + y_P^۲ = ۹ \qquad (۲)$$

با تفریق رابطه‌ی (۲) از (۱) می‌توان گفت:

$$(x_P^۲ + y_P^۲) - ((x_P - ۵)^۲ + y_P^۲) = ۱۰x_P - ۲۵ = ۷ \Rightarrow x_P = \frac{۱۶}{۵}$$

با جای‌گذاری مقدار x_P در رابطه‌ی (۱) مقدار $y_P = \frac{+۱۲}{۵}, \frac{-۱۲}{۵}$ به‌دست می‌آید که با توجه به قرار گرفتن نقطه‌ی P در ربع اول تنها مقدار $y_P = \frac{۱۲}{۵}$ قابل قبول است.

حال توجه کنید که خط گذرنده از نقاط B و P دارای شیبی برابر $\frac{۳}{۴}$ می‌باشد. از آن‌جا که خط گذرنده از C و T بر خط گذرنده از نقاط P و B

عمود است، می‌توان فهمید شیب این خط برابر $\frac{-۴}{۳}$ می‌باشد. بنابراین معادله‌ی خط گذرنده از T و C برابر با $y = \frac{-۴}{۳}(x - ۵) = \frac{-۴x + ۲۰}{۳}$ است. نقطه‌ی T با مختصات $(x_T , ۵)$ روی این خط قرار دارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$T \text{ روی خط } \Rightarrow ۵ = \frac{۲۰ - ۴x_T}{۳} \Rightarrow x_T = \frac{۵}{۴}$$

بنابراین طول پاره‌خط TD برابر $\frac{۱۵}{۴} = \frac{۵}{۴} - ۵$ می‌شود.

پاسخ ۱۰) می‌دانیم شیب خط PQ برابر با: $\frac{-۴h}{۳w}$ می‌باشد از طرفی این شیب برابر با $\frac{-xy}{yz}$ خواهد بود. می‌دانیم: $\frac{-xy}{yz} = \frac{-۱}{۲}$ بنابراین می‌توان گفت:

$$-\frac{۴h}{۳w} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{h}{w} = \frac{۳}{۸}$$

پاسخ ۱۱) نقطه‌ی A را به عنوان مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم در نتیجه مختصات نقطه‌ی B برابر $(۰, ۲)$ می‌باشد با توجه به این‌که $AC=BC$ می‌توان فهمید، $x_C = ۱$ در نتیجه مختصات نقطه‌ی C برابر $(۱, y_C)$ می‌باشد. می‌دانیم شیب خط AC برابر y_C و شیب خط BC برابر $\frac{y_C - ۰}{۱ - ۲} = -y_C$ می‌باشد. حال با توجه به این که این ۲ خط بر هم عمودند می‌توان فهمید:

$$y_C(-y_C) = -۱ \Rightarrow y_C^۲ = ۱ \Rightarrow y_C = ۱$$

(توجه کنید که عرض نقطه‌ی C مثبت است.)

در نتیجه مختصات نقطه‌ی C برابر $(۱, ۱)$ می‌باشد بنابراین می‌توان گفت عرض D برابر ۱ می‌باشد. حال مختصات D را با $(x_D , ۱)$ نشان می‌دهیم از آنجا که طول BD برابر ۲ می‌باشد می‌توان گفت:

$$\sqrt{(۱-۰)^۲ + (۲ - x_D)^۲} = ۲ \Rightarrow (۲ - x_D)^۲ = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲ - x_D = \sqrt{۳}$$

در نتیجه $x_D = ۲ - \sqrt{۳}$. حال در مثلث قائم‌الزاویه DEC طول DE نصف وتر است پس: $D\hat{B}E = ۳۰^\circ$ بنابراین زاویه‌ی DBC برابر $۴۵^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵^\circ$ می‌باشد. همچنین طول CD برابر $\sqrt{۳} - ۱$ می‌باشد.

فصل پنجم
معادلات درجه‌ی اول
و معادله‌ی خط

۵-۵: معادله‌ی درجه‌ی اول

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱)

الف) $\frac{x-۱}{۳}+۳(x-۲)=۵ \xrightarrow{\times ۳} x-۱+۹(x-۲)=۱۵ \Rightarrow ۱۰x=۳۴ \Rightarrow x=۳/۴$

ب) $۳t+۹-\frac{۵t}{۳}=-۱۳ \xrightarrow{\times ۳} ۹t+۲۷-۵t=-۳۹ \Rightarrow ۴t=-۶۶ \Rightarrow t=-\frac{۳۳}{۲}$

پ) $۳x-۲=\frac{x}{۲}+۹ \xrightarrow{\times ۲} ۶x-۴=x+۱۸ \Rightarrow ۵x=۲۲ \Rightarrow x=\frac{۲۲}{۵}$

ت) $۸x-۳x-۲=۳x-۱۰ \Rightarrow ۲x=-۸ \Rightarrow x=-۴$

ث) $۳x-۱۷=۳x+۱۵ \Rightarrow -۱۷=۱۵$ معادله جواب ندارد.

ج) $۹x-۲=۹x-۲ \Rightarrow$ معادله بی‌شمار جواب دارد.

پاسخ ۲)

الف) $x^۲+۶x-۷=x^۲+۲x+۱ \Rightarrow ۴x=۸ \Rightarrow x=۲$

ب) $z+z^۳=۳+z^۳ \Rightarrow z=۳$

پ) $(۸m+۵)(۵m+۷)=(۴m-۳)(۱۰m-۷) \Rightarrow ۴۰m^۲+۸۱m+۳۵=۴۰m^۲-۵۸m+۲۱ \Rightarrow ۱۳۹m=-۱۴ \Rightarrow m=\frac{-۱۴}{۱۳۹}$

پاسخ ۳) باید به ازای $x=۴$ تساوی داده شده برقرار باشد. پس می‌توان نوشت:

$$x+۲a=۱۶+ax-۶a \xrightarrow{x=۴} ۴+۲a=۱۶+۴a-۶a \Rightarrow ۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$$

پاسخ ۴) ابتدا معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x+۲b=-۴+۲bx \Rightarrow x(۱-۲b)=-۴-۲b$$

برای آن‌که معادله‌ی بالا جواب نداشته باشد باید ضریب x را برابر صفر قرار دهیم:

$$۱-۲b=۰ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

پاسخ ۵) برای آن که این معادله دارای بی‌شمار جواب باشد باید دو رابطه‌ی $a(a-۱)=۰$ و $۲a-۲=۰$ هم زمان بر قرار باشد. به ازای $a=۱$ هر دو معادله برقرار است.

پاسخ ۶) $a=۲\ ,\ a=۰$

پاسخ ۷) ابتدا طرف چپ را تا جایی که امکان دارد ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{\frac{۱}{۳}(\underbrace{\frac{۱}{۳}(\underbrace{\frac{۱}{۳}(\underbrace{\frac{۱}{۳}(\underbrace{\frac{۱}{۳}x-۱}_{۱})-۱}_{۲})-۱}_{۳})-۱}_{۴})-۱}_{۵}$$

مرحله‌ی (۱): $\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}x-۱)=\frac{۱}{۹}x-\frac{۱}{۳}$

$\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}x-۱)-۱=\frac{۱}{۹}x-\frac{۴}{۳}$: مرحله‌ی (۲)

$\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۹}x-\frac{۴}{۳})-۱=\frac{۱}{۲۷}x-\frac{۴}{۹}-۱=\frac{۱}{۲۷}x-\frac{۱۳}{۹}$: مرحله‌ی (۳)

$\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲۷}x-\frac{۱۳}{۹})-۱=\frac{۱}{۸۱}x-\frac{۱۳}{۲۷}-۱=\frac{۱}{۸۱}x-\frac{۴۰}{۲۷}$: مرحله‌ی (۴)

$\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۸۱}x-\frac{۴۰}{۲۷})-۱=\frac{x}{۲۴۳}-\frac{۴۰}{۸۱}-۱=\frac{x}{۲۴۳}-\frac{۱۲۱}{۸۱}=۰$: مرحله‌ی (۵)

در نتیجه مسأله به حل معادله‌ی $\frac{x}{۲۴۳}-\frac{۱۲۱}{۸۱}=۰$ یا به طور ساده‌تر $x-۳۶۳=۰$ منجر می‌شود که پاسخ آن ۳۶۳ و رقم یکان آن ۳ می‌باشد.

پاسخ ۸) **الف)** اگر عبارت $\frac{-۱}{x^{۲}+۱}$ را به دو طرف معادله‌ی دوم بیفزاییم به تساوی $x-۳=۳-x$ می‌رسیم که ریشه‌ی آن $x=۳$ می‌باشد. از آن‌جا که $x=۳$ جواب هر دو معادله است می‌توان نتیجه گرفت دو معادله هم‌ارز هستند.

ب) با افزودن عبارت $\frac{۱}{x-۱}$ به دو طرف معادله‌ی دوم و با فرض $x\neq ۱$ به معادله‌ی $۲x=۳x-۵$ می‌رسیم که جواب آن $x=۱$ می‌باشد، اما به ازای $x=۱$ معادله‌ی دوم تعریف نشده است، در نتیجه معادله‌ی دوم جواب حقیقی ندارد، اما جواب معادله‌ی اول $x=۱$ می‌باشد، بنابراین دو معادله هم‌ارز نیستند.

پ) با استدلالی مشابه قسمت (ب) می‌توان فرض کرد $x\neq ۵$ در نتیجه معادله‌ی $\frac{x-۴}{x-۵}=\frac{۶-x}{x-۵}$ به معادله‌ی $x-۴=۶-x$ تبدیل می‌شود که $x=۵$ ریشه‌ی آن است، در نتیجه معادله‌ی دوم جواب ندارد، حال آن‌که $x=۵$، ریشه‌ی اولین معادله است. پس دو معادله هم‌ارز نیستند!

پاسخ ۹) با فرض $\sqrt{y}=c$ خواهیم داشت:

$$\frac{۳}{۲+c}+\frac{۴}{۲+c}=۱ \Rightarrow \frac{۷}{۲+c}=۱ \Rightarrow ۲+c=۷\Rightarrow c=۵$$

در نتیجه مسأله به حل معادله‌ی $\sqrt{y}=۵$ یا به طور مشابه $y=۲۵$ تبدیل می‌شود!

پاسخ ۱۰)

$$\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}=۳\sqrt{x+۱}-۳\sqrt{x-۱}\Rightarrow ۴\sqrt{x-۱}=۲\sqrt{x+۱}\xrightarrow{۲\cdot ⅓U}۱۶(x-۱)=۴(x+۱)\Rightarrow ۴(x-۱)=x+۱\Rightarrow ۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

پاسخ ۱۱) اگر میزان سرمایه گذاری در موسسه‌ی A را با x نشان دهیم، میزان سرمایه گذاری در موسسه‌ی B، برابر $۲x$ خواهد بود پس می‌توان نوشت:

$$x+۲x=۱۸\Rightarrow ۳x=۱۸\Rightarrow x=۶$$

پس میزان سرمایه گذاری در موسسه‌ی B، برابر ۱۲ میلیون تومان است.

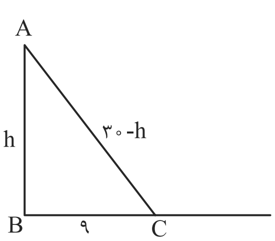
پاسخ ۱۲) عرض حیاط را با w نمایش می‌دهیم. اکنون طبق صورت مسأله می‌توان فهمید طول حیاط برابر با $۳w+۴$ خواهد بود.

حال براساس صورت مسأله یک معادله می‌سازیم:

۲× óIÃe Æ0ø + óIÃe Ï¼ö = óIÃe ôÃd¶

$$۲\ (\ w\ +\ ۳w\ +\ ۴\ )\ =\ ۷۷۶$$

در نتیجه مسأله به حل معادله‌ی $۸(w+۱)=۷۷۶$ تبدیل می‌شود که پاسخ آن $w=۹۶$ خواهد بود. در نتیجه طول حیاط برابر با $۳\times۹۶+۴=۲۹۲$ خواهد بود. پس مساحت حیاط برابر با $۹۶\times۲۹۲=۲۸۰۳۲$ مترمربع است.



پاسخ ۱۳) با توجه به شکل مقابل، با فرض $AB=h$ خواهیم داشت: $AC=۳۰-h$

حال طبق رابطه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$h^{۲}+۸۱=(۳۰-h)^{۲}$$

حال به حل معادله‌ی فوق می‌پردازیم. برای این امر طرف راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$h^{۲}+۸۱=h^{۲}-۶۰h+۹۰۰\Rightarrow ۶۰h=۹۰۰-۸۱=۸۱۹\Rightarrow h=۱۳/۶۵$$

در نتیجه اگر چوب را از فاصله‌ی $h=۱۳/۶۵$ نسبت به سطح زمین بشکنیم چنین حالتی روی خواهد داد.

یادداشت: **این مسأله متعلق به سال** ۲۵۰ **پیش از میلاد می‌باشد، یعنی بیش از** ۲۲۶۰ **سال پیش!**

پاسخ ۱۴) قیمت قرص B را با x نشان می‌دهیم، بنابراین قیمت قرص A، برابر با $x+200$ تومان خواهد بود. حال داده‌های مسأله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

معادل ریاضی	عبارت
x	قیمت قرص B
$x+200$	قیمت قرص A
$14x$	مبلغ پرداختی برای قرص نوع B
$14(x+200)$	مبلغ پرداختی برای قرص نوع A

اکنون طبق صورت مسأله یک معادله تشکیل می‌دهیم:

[®مبلغ پرداخت}ده] = [مبلغ پرداختی برای قر | A] + [مبلغ پرداختی برای قر | B]

$$5600 = 14(x+200) + 14x$$

بنابراین مسأله به حل معادله‌ی $14x+14(x+200)=14(x+x+200)=14(2x+200)=5600$ یا به طور ساده‌تر $x+100=200$ تبدیل می‌گردد که جواب آن $x=100$ می‌باشد. در نتیجه قیمت هر عدد قرص A، برابر با ۳۰۰ تومان خواهد بود.

پاسخ ۱۵) با توجه به داده‌های مسأله می‌توان فهمید $h=5000$ و $D=25$. در نتیجه مسأله به یافتن T، از معادله‌ی زیر محدود می‌شود:

$$5000=227(T-25)$$

از این رو می‌توان نوشت:

$$T=25+\frac{5000}{227}\simeq 47/026$$

پاسخ ۱۶) با توجه به صورت مسأله می‌توان گفت در ازای ۱ متر بالا رفتن از سطح زمین، دمای هوا $\frac{1}{300}=\frac{10}{3000}$ درجه کاهش می‌یابد. حال اگر h متر از سطح زمین بالا رویم، دمای زمین $\frac{h}{300}$ درجه کاهش می‌یابد، از این رو می‌توان نوشت:

[دمای هوا در ارتفاع h] = [دمای هوا در سطح زمین] − [میزان کاهش دما در ارتفاع h]

$$T = 30 - \frac{h}{300}$$

اکنون باید معادله‌ی $T=0$ یا به طور ساده‌تر $30-\frac{h}{300}=0$ را حل کنیم که پاسخ آن ۹۰۰۰ متر می‌باشد.

یادداشت: **کوهنوردان از چنین رابطه‌ای برای تخمین دمای کوه استفاده می‌کنند.**

پاسخ ۱۷) هزینه‌ی پرداختی به زهرا به ازای هر ساعت را x در نظر می‌گیرم در این صورت خواهیم داشت:

هزینه‌ی پرداختی به ازای هر ساعت کار بیش از ۴۰ ساعت کار $=x+\frac{50}{100}x=x+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}$

با توجه به این‌که زهرا ۵۲ ساعت کار کرده است پس ۴۰ ساعت با قیمت x و ۱۲ ساعت با قیمت $\frac{3x}{2}$ کار کرده است و می‌توان نوشت:

$$40x+12\left(\frac{3x}{2}\right)=464 \Rightarrow 40x+18x=464 \Rightarrow x=\frac{464}{58}=8$$

پس حقوق پایه‌ی زهرا، ساعتی ۸۰۰۰ تومان است.

پاسخ ۱۸) حجم اسید خالص را با V نشان می‌دهیم. حال داده‌های مسأله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

معادل ریاضی	عبارت
V	حجم اسید اضافه‌شده
$10+V$	حجم محلول جدید (جمع حجم محلول و اسید اضافه شده)
$0/3\times 10=3$	حجم اسید در محلول اولیه
$0/5\times(V+10)$	حجم اسید در محلول دوم

اکنون مطابق صورت مسأله یک معادله تشکیل می‌دهیم:

$$\boxed{\text{حجم اسید در محلول اول}} + \boxed{\text{حجم اسید در محلول دوم}} = \boxed{\text{حجم اسید در محلول سوم}}$$

$$۳ \quad + \quad V \quad = \quad \frac{۱}{۲}(V+۱۰)$$

که جواب آن $V=۴ml$ می‌باشد. به این فرآیند، فرآیند «تغلیظ» می‌گویند!

پاسخ ۱۹) شیر مخزن A ، این مخزن را در ۳۰ ساعت تخلیه می‌کند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۳۰}$ حجم مخزن A خالی می‌شود بنابراین در t ساعت $\frac{t}{۳۰}$ حجم مخزن A خالی می‌شود، یعنی پس از گذشت t ساعت، $\frac{t}{۳۰}\times۱۵۰=۵t$ لیتر از مخزن A خالی می‌شود بنابراین حجم بنزین باقیمانده در مخزن A برابر $۱۵۰-۵t$ است. به همین ترتیب، حجم بنزین باقیمانده در مخزن B پس از t ساعت برابر $۱۸۰-۴t$ است. حال می‌توان نوشت:

$$\text{حجم بنزین مخزن A} = \frac{۱}{۲}\times \text{حجم بنزین مخزن B} \Rightarrow ۱۵۰-۵t=\frac{۱}{۲}(۱۸۰-۴t) \Rightarrow ۱۵۰-۵t=۹۰-۲t \Rightarrow ۶۰=۳t \Rightarrow t=۲۰$$

بنابراین پس از گذشت ۲۰ ساعت، حجم بنزین مخزن A، نصف حجم بنزین مخزن B می‌شود.

۵-۶: دستگاه معادلات

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱) برای قرینه کردن ضریب y در دو معادله، کافی است معادله‌ی اول را در عدد ۲ و معادله‌ی دوم را در عدد ۳ ضرب کنیم:

$$\begin{cases} ۴x - ۶y = -۱۴ \\ ۹x + ۶y = -۱۵ \end{cases}$$

حال با جمع کردن دو معادله به تساوی $۱۳x = -۲۹$ می‌رسیم که در نتیجه: $x = \frac{-۲۹}{۱۳}$

حال با جای‌گذاری این مقدار در اولین معادله، به رابطه‌ی $\frac{-۵۸}{۱۳} - ۳y = -۷$ می‌رسیم که با حل آن $y = \frac{۱۱}{۱۳}$ به دست می‌آید.

پاسخ ۲) از معادله‌ی دوم x را برحسب y تعیین می‌کنیم: $۲x - ۷y = -۱ \Rightarrow x = \frac{۷y - ۱}{۲}$

با جای‌گذاری این مقدار به جای x در اولین معادله به تساوی زیر می‌رسیم:

$$۵(\frac{۷y - ۱}{۲}) + ۳y = ۱۸ \xrightarrow{\times ۲} ۵(۷y - ۱) + ۶y = ۳۶ \Rightarrow y = ۱$$

حال با جای‌گذاری مقدار y در رابطه‌ی $x = \frac{۷y - ۱}{۲}$ مقدار x برابر ۳ خواهد شد.

پاسخ ۳) **۱)** محاسبه‌ی مختصات نقطه‌ی A: برای به دست آوردن مختصات نقطه‌ی A باید خطوط AB و AC را با هم قطع دهیم. بنابراین باید دستگاه معادلات مقابل را حل کنیم:

$$\begin{cases} ۲x + ۵y = ۱۱ \\ ۴x - y = ۱۱ \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ی اول را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴x + ۱۰y = ۲۲ \\ ۴x - y = ۱۱ \end{cases}$$

اکنون معادله‌ی دوم را از معادله‌ی اول کم می‌کنیم: $(۴x + ۱۰y) - (۴x - y) = ۱۱y = ۱۱ \Rightarrow y = ۱$

با جای‌گذاری مقدار y در نخستین معادله مقدار x برابر ۳ خواهد شد. در نتیجه مختصات نقطه‌ی A برابر $(۳, ۱)$ خواهد بود.

۲) محاسبه‌ی مختصات نقطه‌ی B: برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی B باید خطوط BC و AB را با هم قطع دهیم، پس باید جواب دستگاه معادلات زیر را بیابیم:

$$\begin{cases} ۲x + ۵y = ۱۱ \\ ۵x - ۴y = ۱ \end{cases}$$

جواب این دستگاه برابر $x = \frac{۴۹}{۳۳}$ و $y = \frac{۵۳}{۳۳}$ می‌باشد پس مختصات برابر $(\frac{۴۹}{۳۳}, \frac{۵۳}{۳۳})$ خواهد بود.

۳) محاسبه‌ی مختصات نقطه‌ی C: به همین ترتیب برای یافتن مختصات نقطه‌ی C کافی است جواب دستگاه معادلات زیر را حساب کنیم:

$$\begin{cases} ۴x - y = ۱۱ \\ ۵x - ۴y = ۱ \end{cases}$$

که جواب آن $x = \frac{۴۳}{۱۱}$ و $y = \frac{۵۱}{۱۱}$ می‌باشد در نتیجه مختصات نقطه‌ی C برابر $(\frac{۴۳}{۱۱}, \frac{۵۱}{۱۱})$ است.

پاسخ ٤) پس از حل دستگاه $\begin{cases}2x-3y=-1\\ 3x+2y=5\end{cases}$ خواهیم داشت، $x=1$ و $y=1$. پس معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقاط $(-1,3)$ و $(1,1)$ بگذرد. به سادگی می‌توان فهمید که معادله‌ی این خط به صورت $y=-x+2$ است.

پاسخ ٥) طول مستطیل را با x و عرض آن را با y نمایش می‌دهیم. با توجه به صورت سؤال به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}x=2y\\ 2(x+y)=90\end{cases}$$

پس از حل دستگاه بالا خواهیم داشت، $x=30$ و $y=15$

پاسخ ٦) برای آن‌که این دستگاه جواب نداشته باشد باید دو خط داده شده با هم موازی باشند:

$$x+2y=4\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2\Rightarrow \text{شیب}=-\frac{1}{2}$$

$$(a+1)x+4ay=7\Rightarrow y=-\frac{a+1}{4a}x+\frac{7}{4a}\Rightarrow \text{شیب}=-\frac{a+1}{4a}$$

برای موازی بودن دو خط بالا باید داشته باشیم:

$$-\frac{1}{2}=-\frac{a+1}{4a}\Rightarrow 4a=2a+2\Rightarrow a=1$$

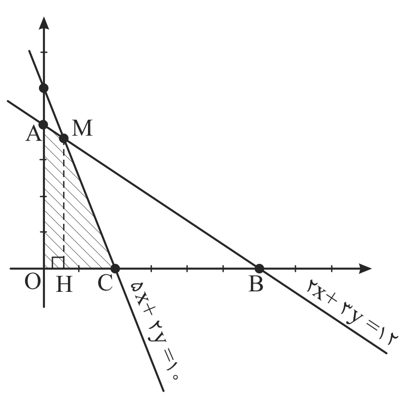
پاسخ ٧) **الف)** همان‌طور که می‌دانید، شیب خط $x-200y=-200$ برابر $\frac{1}{200}$ و شیب خط $x-199y=198$ برابر $\frac{1}{199}$ می‌باشد. از آن‌جا که شیب دو خط مساوی نیست می‌توان نتیجه گرفت دو خط موازی نیستند.

ب) با توجه به موازی و منطبق نبودن دو خط می‌توان دریافت دستگاه قطعاً یک جواب دارد.

پاسخ ٨) وزن محسن را با x و وزن علی را با y نشان می‌دهیم. در این صورت به دستگاه معادلات $\begin{cases}2x+y=361\\ x+2y=362\end{cases}$ می‌رسیم که پس از حل این دستگاه خواهیم داشت: $x=120$, $y=121$

پاسخ ٩) ابتدا نقطه‌ی تلاقی دو خط $2x+y=3$ و $3x-y=2$ را از طریق حل دستگاه $\begin{cases}2x+y=3\\ 3x-y=2\end{cases}$ محاسبه می‌کنیم که در این صورت به نقطه‌ی $(1,1)$ می‌رسیم. حال نقطه‌ی $(1,1)$ باید روی خط $ax+5y=7$ نیز واقع باشد پس می‌توان نوشت:

$$ax+5y=7\xrightarrow{x=1,y=1}a+5=7\Rightarrow a=2$$



پاسخ ١٠) اگر دو خط مورد نظر را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم به شکل مقابل می‌رسیم:
برای محاسبه‌ی مساحت قسمت هاشورخورده باید مساحت مثلث MBC را از مساحت مثلث OAB کم کنیم:

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده}=\frac{1}{2}\times4\times6-\frac{1}{2}\times MH\times BC$$

$$=12-\frac{1}{2}\times MH\times4=12-2MH$$

برای محاسبه‌ی مقدار MH باید عرض نقطه‌ی M را از حل دستگاه $\begin{cases}2x+3y=12\\ 5x+2y=10\end{cases}$ به‌دست آوریم که برابر $\frac{40}{11}$ است. پس مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با: $12-2(\frac{40}{11})=\frac{52}{11}$

پاسخ ١١) **الف)** ابتدا از معادله‌ی اول دستگاه خواهیم داشت:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=t\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\ y=3t\end{cases}$$

حال مقادیر x و y را در معادله‌ی دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$4(2t)-5(3t)=1\Rightarrow 8t-15t=1\Rightarrow t=\frac{-1}{7}$$

حال با جای گذاری مقدار t ، خواهیم داشت:

$$x=۲t=-\frac{۲}{۷} \qquad , \qquad y=۳t=-\frac{۳}{۷}$$

ب) همانند قسمت (الف) عمل می‌کنیم:

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=t \Rightarrow \begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=۳t-۱ \end{cases}$$

حال مقادیر x و y را در معادله‌ی دوم دستگاه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲t+۱+۳t-۱=۲ \Rightarrow ۵t=۲ \Rightarrow t=\frac{۲}{۵}$$

اکنون مقادیر x و y را می‌توان محاسبه کرد:

$$x=۲t+۱=\frac{۴}{۵}+۱=\frac{۹}{۵} \qquad , \qquad y=۳t-۱=\frac{۶}{۵}-۱=\frac{۱}{۵}$$

پ) با فرض $A=\frac{۱}{x}$ و $B=\frac{۱}{y}$ ، دستگاه به فرم $\begin{cases} A+B=۲ \\ ۴A+۲B=۶ \end{cases}$ تبدیل می‌شود.

پس از حل این دستگاه خواهیم داشت، $A=۱$ و $B=۱$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$A=۱ \Rightarrow \frac{۱}{x}=۱ \Rightarrow x=۱$$

$$B=۱ \Rightarrow \frac{۱}{y}=۱ \Rightarrow y=۱$$

ت) ابتدا معادلات داده شده در دستگاه را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} (x+۱)^{۲}+y=x^{۲}+۵ \Rightarrow x^{۲}+۲x+۱+y=x^{۲}+۵ \Rightarrow ۲x+y=۴ \\ (y-۲)^{۲}+x=y^{۲}-۱ \Rightarrow y^{۲}-۴y+۴+x=y^{۲}-۱ \Rightarrow x-۴y=-۵ \end{cases}$$

پس مسأله به حل دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ x-۴y=-۵ \end{cases}$ تبدیل می‌شود که پس از حل خواهیم داشت:

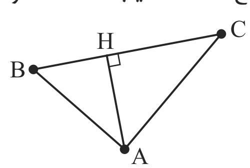
$$x=\frac{۱۱}{۹} \quad , \quad y=\frac{۱۴}{۹}$$

ث) ابتدا معادله‌ی اول دستگاه را طبق اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$x^{۲}-y^{۲}=۲۴ \Rightarrow (x-y)(x+y)=۲۴ \xrightarrow{x-y=۴} ۴(x+y)=۲۴ \Rightarrow x+y=۶$$

حال کافی است دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y=۶ \\ x-y=۴ \end{cases}$ را حل کنیم که در این صورت خواهیم داشت: $x=۵$, $y=۱$

پاسخ ۱۲) **الف)** ابتدا شکل تقریبی مقابل را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل برای نوشتن معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC ، شیب خط AH را می‌خواهیم. از طرفی خط AH بر BC عمود است پس می‌توان نوشت:



$$BC \text{ شیب } =\frac{۱۰-۹}{۱-(-۷)}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow AH \text{ شیب } =-۸$$

حال می‌توان معادله‌ی ارتفاع AH را به صورت زیر نوشت:

$$y-۶=-۸(x+۵) \Rightarrow y=-۸x-۳۴$$

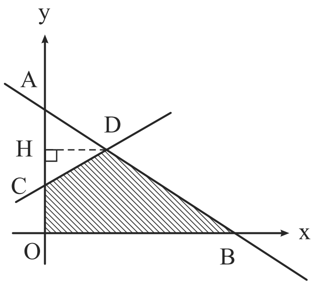
ب) ابتدا محل تلاقی دو خط AH و BC را محاسبه می‌کنیم. طبق قسمت (الف)، معادله‌ی خط AH به صورت $y=-۸x-۳۴$ است. به سادگی می‌توان فهمید معادله‌ی ضلع BC به صورت $y=\frac{۱}{۸}x+\frac{۷۹}{۸}$ است. پس از حل دستگاه $\begin{cases} y=-۸x-۳۴ \\ y=\frac{۱}{۸}x+\frac{۷۹}{۸} \end{cases}$ خواهیم داشت $x=-\frac{۳۵۱}{۶۵}$ و $y=\frac{۴۶}{۵}$.

پس مختصات نقطه‌ی H به صورت $(-\frac{۳۵۱}{۶۵},\frac{۴۶}{۵})$ است و طول ارتفاع AH برابر است با:

$$AH=\sqrt{(-۵+\frac{۳۵۱}{۶۵})^۲+(۶-\frac{۴۶}{۵})^۲}=\sqrt{(\frac{۲۶}{۶۵})^۲+(\frac{۱۶}{۵})^۲}=\frac{\sqrt{۲۶۰}}{۵}\simeq ۳/۲$$

پاسخ ۱۳) ابتدا نقاط تقاطع خط $۲x+۳y=۱۲$ را با محورهای مختصات حساب می‌کنیم. می‌دانیم این نقاط بیانگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ این خط هستند، در نتیجه می‌توان فهمید: $OB=۶\ ,\ OA=۴$

از این رو مساحت مثلث OAB برابر ۱۲ خواهد بود. اکنون برای حساب کردن مساحت قسمت هاشورخورده کافی است مساحت مثلث ADC را از مساحت مثلث OAB کم کنیم. با توجه به این‌که عرض از مبدأ خط $y=\frac{x}{۳}+a$ برابر a می‌باشد می‌توان فهمید $OC=a$. در نتیجه طول AC برابر $۴-a$ خواهد بود. حال کافی است ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AC این مثلث یا طول نقطه‌ی D را حساب کنیم. می‌دانیم برای حساب کردن طول نقطه‌ی D باید مقدار x را در دستگاه مقابل بیابیم:



$$\begin{cases} y=\frac{x}{۳}+a \\ ۲x+۳y=۱۲ \end{cases}$$

پس از حل دستگاه فوق خواهیم داشت $x=۴-a$، در نتیجه مساحت مثلث ACD برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}AC\times DH=\frac{۱}{۲}(۴-a)(۴-a)=\frac{(۴-a)^۲}{۲}$$

حال می‌توان نوشت:

$$OCDB \text{ Selv¶}=\overset{\triangle}{AOB}\text{ Selv¶}-\overset{\triangle}{ACD}\text{ Selv¶}\Rightarrow ۱۰=۱۲-\frac{۱}{۲}(۴-a)^۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۴-a)^۲=۲$$

از معادله‌ی فوق نتیجه می‌شود $۴-a=۲$ (توجه کنید که مطابق شکل مقدار a کم‌تر از ۴ است). در نتیجه: $a=۲$

پاسخ ۱۴) اگر مختصات نقطه‌های A و B را به صورت $A(۱,y_۱)$ و $B(۱,y_۲)$ در نظر بگیریم، طبق قضیه‌ی تالس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{y_۱}{۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y_۱=\frac{۱}{۲} \\ \frac{y_۲}{۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y_۲=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

طول پاره‌خط AB برابر است با $y_۱-y_۲$ ، پس می‌توان نوشت: $AB=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$

پاسخ ۱۵) **الف)** ابتدا عبارت $۳x^۲+۵xy-۲y^۲$ را تجزیه می‌کنیم:

$$۳x^۲+۵xy-۲y^۲=(۳x-y)(x+۲y)\Rightarrow(۳x-y)(x+۲y)=۴۸\xrightarrow{x+۲y=۶}۶(۳x-y)=۴۸$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود $۳x-y=۸$. پس مسأله به حل دستگاه $\begin{cases} x+۲y=۶ \\ ۳x-y=۸ \end{cases}$ منجر می‌شود که با حل این دستگاه خواهیم داشت: $x=\frac{۲۲}{۷}$ و $y=\frac{۱۰}{۷}$

ب) ابتدا معادله‌ی دوم دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x-y)^۲(x+y)=۱۷۵\xrightarrow{x+y=۷}۷(x-y)^۲=۱۷۵\Rightarrow(x-y)^۲=۲۵\Rightarrow x-y=\pm۵$$

بنابراین مسأله، منجر به حل دستگاه‌های $\begin{cases} x+y=۷ \\ x-y=۵ \end{cases}$ و $\begin{cases} x+y=۷ \\ x-y=-۵ \end{cases}$ می‌شود که جواب دستگاه اول، $x=۶$ و $y=۱$ و جواب دستگاه دوم، $x=۱$ و $y=۶$ است.

پ) با فرض $\frac{۱}{x-۱}=a$ و $\frac{۱}{y+۱}=b$ ، این دستگاه به $\begin{cases} a+۲b=\frac{۷}{۶} \\ ۳a-b=\frac{۷}{۶} \end{cases}$ تبدیل می‌شود که پس از حل این دستگاه خواهیم داشت، $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۳}$.

حال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{x-۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x-۱=۲\Rightarrow x=۳ \\ b=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{۱}{y+۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y+۱=۳\Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

ت) ابتدا معادله‌ی دوم دستگاه را به صورت $xy(x+y)=۳۰$ می‌نویسیم. حال با فرض $xy=a$ و $x+y=b$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a+b=۱۱ \\ ab=۳۰ \end{cases}$$

از معادله‌ی اول دستگاه خواهیم داشت: $b=۱۱-a$. با جای‌گذاری این مقدار در معادله‌ی دوم خواهیم داشت:

$$a(۱۱-a)=۳۰\Rightarrow ۱۱a-a^{۲}=۳۰\Rightarrow a^{۲}-۱۱a+۳۰=۰\Rightarrow (a-۵)(a-۶)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۵ \\ a=۶ \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر a ، در معادله‌ی $b=۱۱-a$ خواهیم داشت: $b=۶$ یا $b=۵$ پس در هر حالت داریم:

حالت اول:
$$\begin{cases} xy=a \\ x+y=b \end{cases} \xrightarrow{a=۵,\, b=۶} \begin{cases} xy=۵ \\ x+y=۶ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۵ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x=۵ \\ y=۱ \end{cases}$$

حالت دوم:
$$\begin{cases} xy=a \\ x+y=b \end{cases} \xrightarrow{a=۶,\, b=۵} \begin{cases} xy=۶ \\ x+y=۵ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=۳ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x=۳ \\ y=۲ \end{cases}$$

پاسخ ۱۶) اگر معادلات دستگاه را ساده کنیم به دستگاه $\begin{cases} xy+۹۰x+۴y=۰ \\ xy+۴۵x+۵y=۰ \end{cases}$ خواهیم رسید.

حال این دو معادله را از هم کم می‌کنیم در این صورت داریم: $۴۵x-y=۰\Rightarrow y=۴۵x$

با جای‌گذاری $۴۵x$ به جای y در معادله‌ی اول، خواهیم داشت:

$$x(۴۵x)+۹۰x+۱۸۰x=۰\Rightarrow ۴۵x^{۲}+۲۷۰x=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=-۶$$

با توجه به این که $y=۴۵x$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow y=۰ \\ x=-۶\Rightarrow y=-۲۷۰ \end{cases}$$

پاسخ ۱۷) از جمع کردن معادلات دستگاه خواهیم داشت:

$$y^{۲}+x^{۲}+۲xy=۱۶\Rightarrow (x+y)^{۲}=۱۶\Rightarrow x+y=\pm ۴$$

پاسخ ۱۸) معادله‌ی اول دستگاه را در عدد ۲ و معادله‌ی دوم دستگاه را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x(۲x+۳y)=۱۰ \\ ۳y(۲x+۳y)=۲۷ \end{cases}$$

حال معادلات دستگاه بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$۲x(۲x+۳y)+۳y(۲x+۳y)=۳۷\Rightarrow (۲x+۳y)(۲x+۳y)=۳۷\Rightarrow (۲x+۳y)^{۲}=۳۷$$

از معادله‌ی بالا نتیجه می‌گیریم مقدار $۲x+۳y$، برابر $\sqrt{۳۷}$ یا $-\sqrt{۳۷}$ است.

پاسخ ۱۹) با تفریق معادله‌ی دوم از اولین معادله به تساوی $۲(x+y)=\frac{۷}{۲}$ می‌رسیم، در نتیجه می‌توان فهمید $x+y=\frac{۷}{۴}$. با جای‌گذاری مقدار $\frac{۷}{۴}$ به جای $x+y$ در عبارت‌های زیر رادیکال می‌توان صورت معادلات را ساده کرد:

$$\begin{cases} \sqrt{x^{۲}+۱}+x+\sqrt{y^{۲}+۱}+y=\frac{۹}{۲} \\ \sqrt{x^{۲}+۱}-x+\sqrt{y^{۲}+۱}-y=۱ \end{cases}$$

فرض کنید $\sqrt{x^{۲}+۱}+x=A$ و $\sqrt{y^{۲}+۱}+y=B$، بنابراین با توجه به اتحاد مزدوج می‌توان نتیجه گرفت:

$$(\sqrt{x^۲+۱}-x)(\sqrt{x^۲+۱}+x)=(\sqrt{x^۲+۱})^۲-x^۲=x^۲+۱-x^۲=۱\Rightarrow\sqrt{x^۲+۱}-x=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}+x}=\frac{۱}{A}$$

با استدلالی مشابه می‌توان گفت $\sqrt{y^۲+۱}-y=\frac{۱}{B}$ در نتیجه مسأله به حل دستگاه معادلات زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases}A+B=\frac{۹}{۲}\\ \frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}=۱\end{cases}$$

حال دومین معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}=\frac{A+B}{AB}=\frac{\frac{۹}{۲}}{AB}=۱\Rightarrow AB=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین مسأله به حل دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}A+B=\frac{۹}{۲}\\ AB=\frac{۹}{۲}\end{cases}$$

حال حاصل $(A-B)^۲$ را حساب می‌کنیم:

$$(A-B)^۲=(A+B)^۲-۴AB=(\frac{۹}{۲})^۲-\frac{۹}{۲}\times۴=\frac{۸۱}{۴}-۱۸=\frac{۹}{۴}$$

در نتیجه حاصل $A-B$ برابر $\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{-۳}{۲}$ خواهد بود. بنابراین پس از حل دستگاه‌های زیر می‌توان فهمید $A=۳$ و $B=\frac{۳}{۲}$ یا $A=\frac{۳}{۲}$ و $B=۳$ جواب‌های مسأله هستند.

$$۱):\begin{cases}A+B=\frac{۹}{۲}\\ A-B=\frac{۳}{۲}\end{cases}\quad,\quad ۲):\begin{cases}A+B=\frac{۹}{۲}\\ A-B=\frac{-۳}{۲}\end{cases}$$

حال به بررسی حالت $A=۳$ و $B=\frac{۳}{۲}$ می‌پردازیم:

$$A=۳\Rightarrow\sqrt{x^۲+۱}+x=۳\Rightarrow\sqrt{x^۲+۱}=۳-x\xrightarrow{2\ \cdot\ \mathrm{H}\frac{1}{4}\mathrm{U}}x^۲+۱=(۳-x)^۲=x^۲-۶x+۹\Rightarrow-۶x=-۸$$
$$\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

با توجه به این‌که $x+y=\frac{۷}{۴}$ می‌توان فهمید: $y=\frac{۵}{۱۲}$

به طور مشابه در حالت $A=\frac{۳}{۲}$ و $B=۳$ مقدار x برابر $\frac{۵}{۱۲}$ و مقدار y برابر $\frac{۴}{۳}$ خواهد بود.

پاسخ ۲۰) ابتدا هر معادله را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(۱-\frac{۱۲}{y+۳x})\sqrt{x}=۲\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{x}}=۱-\frac{۱۲}{y+۳x}\qquad(۱)$$

$$(۱+\frac{۱۲}{y+۳x})\sqrt{y}=۶\Rightarrow\frac{۶}{\sqrt{y}}=۱+\frac{۱۲}{y+۳x}\qquad(۲)$$

با جمع معادلات (۱) و (۲) به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\frac{۲}{\sqrt{x}}+\frac{۶}{\sqrt{y}}=۲\xrightarrow{\div۲}\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۳}{\sqrt{y}}=۱\qquad(۳)$$

همچنین با تفریق رابطه‌ی (۲) از (۱) به تساوی زیر خواهیم رسید:

$$\frac{۲}{\sqrt{x}}-\frac{۶}{\sqrt{y}}=-\frac{۲۴}{y+۳x}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۳}{\sqrt{y}}=\frac{-۱۲}{y+۳x}\qquad(۴)$$

حال روابط (۳) و (۴) را در هم ضرب کرده، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۳}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۳}{\sqrt{y}}\right)=\frac{-۱۲}{y+۳x}\Rightarrow\frac{۱}{x}-\frac{۹}{y}=\frac{-۱۲}{y+۳x}$$

حال رابطه‌ی فوق را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}-\frac{۹}{y}=\frac{-۱۲}{y+۳x}\Rightarrow\frac{y-۹x}{xy}=\frac{-۱۲}{y+۳x}\Rightarrow(y-۹x)(y+۳x)=-۱۲xy$$

پس از ساده‌سازی عبارت اخیر به تساوی $y^{۲}+۶xy-۲۷x^{۲}=۰$ می‌رسیم. حال به کمک تجزیه‌ی چندجمله‌ای درجه‌ی دوم، چندجمله‌ای طرف چپ تساوی را به صورت $(y-۳x)(y+۹x)=۰$ تجزیه می‌کنیم، در نتیجه می‌توان فهمید: $y=۳x$ یا $y=-۹x$

بـا توجـه بـه مثبـت بودن x و y تنها حالت $y=۳x$ قابل قبول اسـت. پس از جای‌گذاری این رابطه در معادلـه‌ی (۳) مقادیر x و y به ترتیب برابر $۴+۲\sqrt{۳}$ و $۱۲+۶\sqrt{۳}$ خواهند شد!