۶-۱: معرفی نسبت‌های مثلثاتی

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱)

الف) $\sin x=\frac{۱۵}{۱۷}$ ، $\cos x=\frac{۸}{۱۷}$ ، $\tan x=\frac{۱۵}{۸}$ ، $\cot x=\frac{۸}{۱۵}$

ب) $\sin \beta=\frac{۳}{۵}$ ، $\cos \beta=\frac{۴}{۵}$ ، $\tan \beta=\frac{۳}{۴}$ ، $\cot \beta=\frac{۴}{۳}$

پ) $\sin \alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ، $\cos \alpha=\frac{۱}{۲}$ ، $\tan \alpha=\sqrt{۳}$ ، $\cot \alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ت) $\sin \theta=\frac{۶}{۱۰}$ ، $\cos \theta=\frac{۸}{۱۰}$ ، $\tan \theta=\frac{۶}{۸}$ ، $\cot \theta=\frac{۸}{۶}$

پاسخ ۲)

	sin	cos	tan
$\theta_۱$	$\frac{۷}{۲۴}$	$\frac{\sqrt{۵۲۷}}{۲۴}$	$\frac{۷}{\sqrt{۵۲۷}}$
$\theta_۲$	$\frac{\sqrt{۵}}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
$\theta_۳$	$\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$۲\sqrt{۲}$

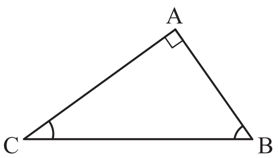
پاسخ ۳)

الف) ۱ **ب)** ۱ **پ)** ۱

پاسخ ٤)

الف) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$ **ب)** $۲-\sqrt{۳}$

پاسخ ٥)



$$۳\sin B=۷\sin C\Rightarrow ۳(\frac{AC}{BC})=۷(\frac{AB}{BC})\xrightarrow{AC=۲۱}۳\times۲۱=۷\times AB\Rightarrow AB=۹$$

حال طبق قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲=۲۱^۲+۹^۲=۵۲۲\Rightarrow BC=\sqrt{۵۲۲}$$

پاسخ ٦)

الف) $c=۵\sqrt{۲}, a=۵$ **ب)** $c=\frac{۴۰}{\sqrt{۳}}, b=\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$ **پ)** $b=۱۲, a=۱۲\sqrt{۳}$

پاسخ ۷) ابتدا ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث CHD می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\sin ۶۰^\circ=\frac{CH}{۳}\Rightarrow CH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ=\frac{DH}{۳}\Rightarrow DH=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

حال در مثلث CHB طبق قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$BH^۲=BC^۲-CH^۲=۴۹-\frac{۲۷}{۴}=\frac{۱۶۹}{۴}\Rightarrow BH=\frac{۱۳}{۲}$$

اکنون به کمک شکل می‌توان فهمید:

$$BD=BH-HD=\frac{۱۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۵$$

پاسخ ۸) با جای‌گذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی، می‌توان فهمید همه‌ی موارد گفته شده درست هستند.

پاسخ ۹) می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع $A=B=C=۶۰^\circ$ پس می‌توان نوشت:

الف) $\sin^۲ A+\sin^۲ B+\sin^۲ C=۳\sin^۲ ۶۰=۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=۳(\frac{۳}{۴})=\frac{۹}{۴}$

ب) $\tan^۲ A+\tan^۲ B+\tan^۲ C=۳\tan^۲ ۶۰=۳(\sqrt{۳})^۲=۳(۳)=۹$

پاسخ ۱۰) به کمک نوشتن $\cos ۳۰$ در مثلث‌های ABC ، ACD و ADE می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\cos ۳۰=\frac{AB}{AC}\xrightarrow{AB=۱}\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\Delta}{ACD}:\cos ۳۰=\frac{AC}{AD}\xrightarrow{AC=\frac{۲}{\sqrt{۳}}}\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}{AD}\Rightarrow AD=\frac{۴}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{AED}:\cos ۳۰=\frac{AD}{AE}\xrightarrow{AD=\frac{۴}{۳}}\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{۴}{۳}}{AE}\Rightarrow AE=\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$$

پاسخ ۱۱)

الف) زوایای ۴۷° و ۴۳° متمم یک‌دیگر هستند پس، $\sin ۴۷^\circ=\cos ۴۳^\circ$

ب) زوایای ۶۸° و ۲۲° متمم یک‌دیگر هستند پس، $\cos ۶۸^\circ=\sin ۲۲^\circ$

پاسخ ۱۲) با توجه به این‌که $\hat{\ }=۹۰^\circ$ پس زوایای B و C متمم یک‌دیگر هستند، بنابراین $\sin C=\cos B$ و $\sin B=\cos C$ و $\cos B=\sin C$ پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\sin C}{\cos B}+\frac{\sin B}{\cos C}=۱+۱=۲$$

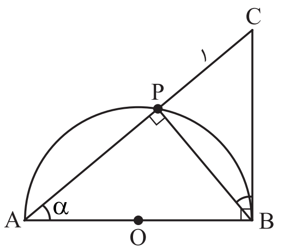
پاسخ ۱۳) زوایای ۱۰° و ۸۰° متمم یک‌دیگر هستند، پس $\cos ۸۰=\sin ۱۰=a$. به همین ترتیب $\cos ۷۰=\sin ۲۰=b$ پس می‌توان نوشت:

$$A=\frac{b+۲a}{a-۳b}$$

پاسخ ۱۴) زوایای ۱۰° و ۸۰° متمم یک‌دیگر هستند، پس $\sin ۱۰=\cos ۸۰$. به همین ترتیب $\sin ۲۰=\cos ۷۰$ و $\sin ۴۰=\cos ۵۰$ پس می‌توان نوشت:

$$B=\frac{\sin ۱۰\times\sin ۲۰\times\sin ۴۰}{\sin ۴۰\times\sin ۲۰\times\sin ۱۰}=۱$$

پاسخ ۱۵) در مثلث ABP می‌توان نوشت:



$$\sin\alpha=\frac{BP}{AB}\xrightarrow{AB=۲r}\sin\alpha=\frac{BP}{۲r}\Rightarrow BP=۲r\sin\alpha$$

در مثلث BPC زاویه‌ی B برابر زاویه‌ی A است پس:

$$\overset{\Delta}{BPC}:\tan B=\frac{PC}{PB}\xrightarrow[PB=۲r\sin\alpha]{B=\alpha,\,PC=۱}\tan\alpha=\frac{۱}{۲r\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow ۲r\sin\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=۱\Rightarrow r=\frac{\cos\alpha}{۲\sin^۲\alpha}$$

پاسخ ۱۶)

این سوال در ویرایش جدید حذف شده است.

پاسخ ۱۷) با توجه به شکل می‌توان فهمید: $\widehat{FBA}=\alpha$. حال مقدار $\sin\alpha$ را در مثلث‌های $\overset{\Delta}{BEC}$ و $\overset{\Delta}{ABF}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BEC}\ \text{در مثلث}: \sin\alpha=\dfrac{BE}{BC} \\ \overset{\Delta}{AFB}\ \text{در مثلث}: \sin\alpha=\dfrac{AF}{AB} \end{array}\right. \xrightarrow{AB=BC} BE=AF$$

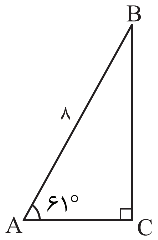
در مثلث $\overset{\Delta}{AFB}$ مقدار $\tan\alpha$ برابر است با:

$$\tan\alpha=\frac{AF}{BF}=\frac{BE}{BE+\underbrace{EF}_{2BE}}=\frac{1}{3}$$

۶-۲: کاربردهای مثلثات

تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱) با توجه به صورت مسأله می‌توان شکل مقابل را رسم کرد: (توجه کنید که طول سایه‌ی نردبان روی زمین، برابر AC است.)



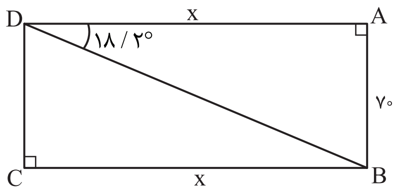
$$\cos ۶۱^\circ=\frac{AC}{AB}\xrightarrow{AB=۸}۰/۴۸=\frac{AC}{۸}\Rightarrow AC=۳/۸۴$$

همچنین طول سایه‌ی نردبان روی دیوار برابر BC است، بنابراین داریم:

$$\sin ۶۱^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow ۰/۸۷=\frac{BC}{۸}\Rightarrow BC=۶/۹۶$$

پاسخ ۲) $\cos\theta=\frac{۸/۲}{۹}$, $\tan\alpha=\frac{۲۷}{۱۴}$

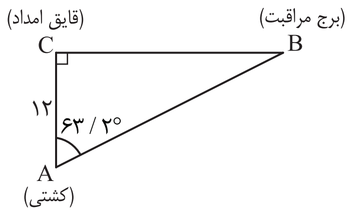
پاسخ ۳) با توجه به صورت مسأله می‌توان شکل روبه‌رو را رسم کرد.



در مثلث ABD می‌توان نوشت:

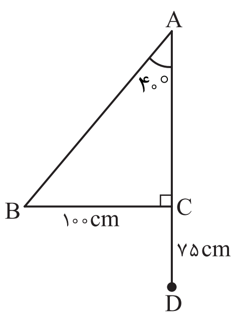
$$\tan ۱۸/۲^\circ=\frac{۷۰}{x}\Rightarrow ۰/۳۲=\frac{۷۰}{x}\Rightarrow x=۲۱۸/۷۵$$

پاسخ ۴) با توجه به صورت مســأله می‌توان شکل روبه‌رو را رسم کرد. اکنون در مثلث ABC مقدار AB را می‌خواهیم، پس می‌توان نوشت:



$$\cos ۶۳/۲^\circ=\frac{AC}{AB}\Rightarrow ۰/۴۵=\frac{۱۲}{AB}\Rightarrow AB\simeq ۲۶/۶km$$

پاسخ ۵) با توجه به صورت مسأله می‌توان شکل مقابل را رسم کرد.



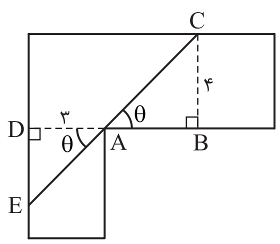
مجهول مسأله، طول AD است. ابتدا در مثلث ABC مقدار AC را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan ۴۰^\circ=\frac{BC}{AC}\Rightarrow ۰/۸۳=\frac{۱۰۰}{AC}\Rightarrow AC\simeq ۱۲۰/۴۸$$

پس طول AD برابر است با:

$$AD=AC+CD=۱۲۰/۴۸+۷۵=۱۹۵/۴۸\ cm$$

پاسخ ۶) با توجه به صورت مســأله می‌توان شــکل مقابل را رســم کرد. همان‌طور که می‌بینید طول تکه چوب برابر $AC+AE$ است. ابتدا در مثلث ABC مقدار AC را تعیین می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\sin\theta=\frac{BC}{AC}\xrightarrow{BC=۴}\sin\theta=\frac{۴}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۴}{\sin\theta}$$

اکنون در مثلث ADE مقدار AE را محاسبه می‌کنیم:

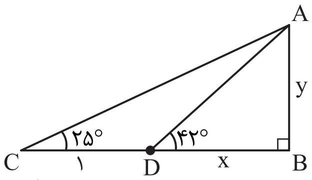
$$\overset{\Delta}{ADE}:\cos\theta=\frac{AD}{AE}\xrightarrow{AD=۳}\cos\theta=\frac{۳}{AE}\Rightarrow AE=\frac{۳}{\cos\theta}$$

پس طول تکه چوب برابر است با:

$$AC+AE=\frac{۴}{\sin\theta}+\frac{۳}{\cos\theta}$$

پاسخ ۷ با توجه به صورت مسأله شکل مقابل را رسم می‌کنیم.

ابتدا در مثلث ABC مقدار BC را می‌یابیم:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan ۲۵^\circ=\frac{AB}{BC}\Rightarrow ۰/۴۶=\frac{y}{۱+x}\Rightarrow y=۰/۴۶(۱+x) \qquad (۱)$$

حال در مثلث ABD می‌توان نوشت:

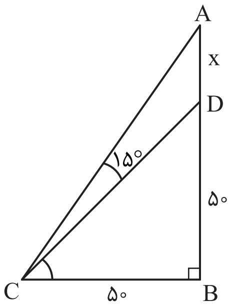
$$\overset{\Delta}{ABD}:\tan ۴۲^\circ=\frac{y}{x}\Rightarrow ۰/۹=\frac{y}{x}\Rightarrow y=۰/۹x \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$۰/۹x=۰/۴۶+۰/۴۶x\Rightarrow ۰/۴۴x=۰/۴۶\Rightarrow x=\frac{۲۳}{۲۲}$$

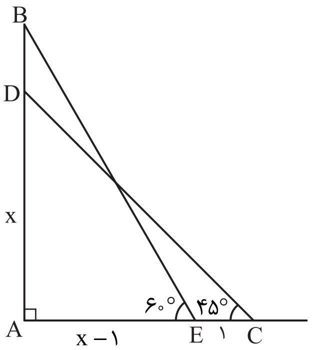
با جای‌گذاری مقدار x خواهیم داشت $y=\frac{۲۰/۷}{۲۲}\simeq ۰/۹۴$. پس ارتفاع کوه، حدود ۹۴۰ متر است.

پاسخ ۸ با توجه به صورت مسأله می‌توان شکل مقابل را رسم کرد. در مثلث BCD ، $\tan C=\frac{۵۰}{۵۰}=۱$ پس زاویه‌ی C برابر ۴۵° است. اکنون در مثلث ABC می‌توان نوشت:



$$\tan ۶۰^\circ=\frac{AB}{BC}\Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{x+۵۰}{۵۰}\Rightarrow ۵۰\sqrt{۳}=x+۵۰\Rightarrow x=۵۰\sqrt{۳}-۵۰$$

پاسخ ۹ با توجه به صورت مسأله می‌توان شکل مقابل را رسم کرد. توجه کنید که مثلث ADC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس با فرض $AD=x$ خواهیم داشت $AC=x$ که در نتیجه $AE=x-۱$ و $DC=x\sqrt{۲}$ (چرا؟). اکنون در مثلث ABE می‌توان نوشت:



$$\cos ۶۰^\circ=\frac{AE}{BE}\xrightarrow[AE=x-۱]{BE=DC=x\sqrt{۲}}\frac{۱}{۲}=\frac{x-۱}{x\sqrt{۲}}\Rightarrow x\sqrt{۲}=۲x-۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۲-\sqrt{۲}}=۲+\sqrt{۲}$$

پس طول نردبان برابر است با: $x\sqrt{۲}=(۲+\sqrt{۲})\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}+۲$

پاسخ ۱۰ شیب خط مورد نظر برابر است با $m=\tan ۴۵^\circ=۱$ پس معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$$y-۵=۱(x-۳)\Rightarrow y=x+۲$$

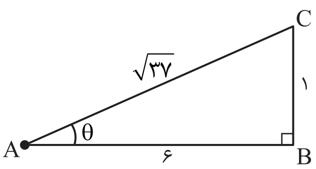
پاسخ ۱۱ **الف)** خط مورد نظر از نقطه‌ی $(-۳,۰)$ می‌گذرد، پس می‌توان نوشت:

$$۲y+ax=۱\xrightarrow{x=-۳,\,y=۰}۰-۳a=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

ب) با جای‌گذاری مقدار a معادله‌ی خط به صورت زیر است:

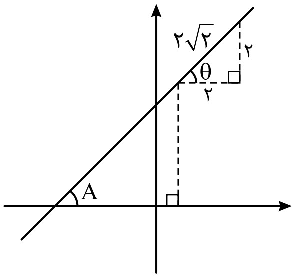
$$۲y-\frac{۱}{۳}x=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۶}x+\frac{۱}{۲}$$

شیب این خط برابر $\frac{۱}{۶}$ است، پس $\tan\theta=\frac{۱}{۶}$. به کمک شکل زیر می‌توان نوشت:



$$\sin\theta=\frac{۱}{\sqrt{۳۷}} \qquad , \qquad \cos\theta=\frac{۶}{\sqrt{۳۷}}$$

پاسخ ۱۲) با توجه به صورت مسأله می‌توان شکل مقابل را رسم کرد. واضح است که زوایای θ و A با هم برابر هستند. پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} \sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

اکنون با توجه به تساوی زوایای A و θ ، می‌توان نوشت:

$$\sin A=\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos A=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin A-\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

پاسخ ۱۳) می‌دانیم در زوایای حاده هر چه زاویه از صفر درجه به 90° نزدیک شود مقدار سینوس آن بزرگ‌تر می‌شود پس می‌توان نوشت:

$$\sin 80^\circ>\sin 40^\circ>\sin 20^\circ>\sin 10^\circ$$

از طرفی مقدار $\sin 20^\circ$ عددی بین صفر و ۱ است پس مقدار $\frac{1}{\sin 20^\circ}$ از ۱ بزرگ‌تر است پس می‌توان نوشت:

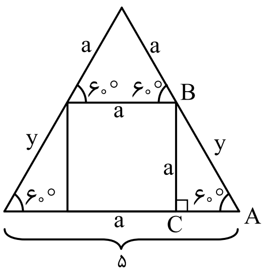
$$\frac{1}{\sin 20^\circ}>\sin 80^\circ>\sin 40^\circ>\sin 20^\circ>\sin 10^\circ$$

پاسخ ۱۴)

الف) $\sin 50^\circ>\sin 40^\circ$ **ب)** $\cos 9^\circ>\cos 10^\circ$

پ) $\tan 50^\circ>\tan 40^\circ$ **ت)** $\sin 70^\circ>\cos 70^\circ$ (توجه کنید که $\cos 70^\circ=\sin 20^\circ$)

پاسخ ۱۵) با توجه به شکل مقابل در مثلث ABC می‌توان نوشت:



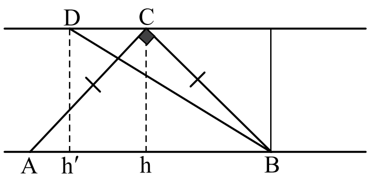
$$\sin 60^\circ=\frac{a}{y}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{y}\Rightarrow y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

اکنون با توجه به شکل می‌توان فهمید طول ضلع مثلث برابر $a+y$ است، پس داریم:

$$a+y=5\Rightarrow a+\frac{2a}{\sqrt{3}}=5\xrightarrow{\times\sqrt{3}}a\sqrt{3}+2a=5\sqrt{3}\Rightarrow a(2+\sqrt{3})=5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=\frac{5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{پس از گویا کردن}}a=10\sqrt{3}-15$$

پاسخ ۱۶) نقطه‌ی B را به عنوان مبدأ انتخاب می‌کنیم. از آن‌جا که مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}=\hat{B}=45^\circ$$

$$AB=2\Rightarrow 4=2BC^2\Rightarrow BC=\sqrt{2}$$

$$Ch^2=BC^2-hB^2=2-1=1$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی C که روی خط $BC:y=-x$ واقع است برابر است با: $C(-1,1)$

حال کافی است مختصات نقطه‌ی D را به دست آوریم:

$$BD=2\xrightarrow{BD^2=(Dh')^2+(Bh')^2}4=1+(Bh')^2\Rightarrow Bh'=\sqrt{3}$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی D به صورت $D(-\sqrt{3},1)$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\tan(D\hat{B}A)=\frac{1}{-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow D\hat{B}A=\frac{-\pi}{6}=-30^\circ\Rightarrow\left|D\hat{B}A\right|=30^\circ\Rightarrow D\hat{B}C=45^\circ-30^\circ=15^\circ$$

۶-۳: اتحادهای مثلثاتی

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ ۱)

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \frac{25}{144}+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=1-\frac{25}{144}=\frac{119}{144}\xrightarrow{\text{حاده است } x}\cos x=\frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{\sqrt{119}}{12}}=\frac{5}{\sqrt{119}}$$

پاسخ ۲) از رابطه‌ی $\cos x=\frac{1}{3}$ و به کمک اتحاد $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ به راحتی می‌توان فهمید $\sin x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ پس $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{8}$.

در نتیجه حاصل عبارت A برابر است با:

$$A=\frac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{8}}{3}-2\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{8}-6\sqrt{8}}{3}}=\frac{3\sqrt{8}}{-5\sqrt{8}}=-\frac{3}{5}$$

پاسخ ۳)

الف) $1-\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=1-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=1-(1+\cos x)=-\cos x$

ب) $\frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}{1-\cos^2 x}=1+\cos^2 x$

پ) $(\sin^2 x-\cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})+1+2\cos^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x+1+2\cos^2 x=\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+1=2$

ت) $\frac{1-(\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{1-(1-2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

پاسخ ۴) در هر کدام از تساوی‌ها اثبات می‌کنیم طرف چپ با طرف راست برابر است:

الف) $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1$

ب) $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\sin x\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{1+\sin x\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)}{1+\sin x\cos x}=\sin x-\cos x$

پ) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{(1-\sin x)^2+(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1+\sin^2 x-2\sin x+1+\sin^2 x+2\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{2+2\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2(1+\sin^2 x)}{\cos^2 x}$

ت) $\frac{1}{2}(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta})=\frac{1}{2}(\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)})=\frac{1}{2}(\frac{1+\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)})$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2+2\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)})=\frac{1}{2}(\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)})=\frac{1}{\cos\theta}$$

ث) $\frac{\cos^2 x-3\cos x+2}{\sin^2 x}=\frac{(\cos x-1)(\cos x-2)}{1-\cos^2 x}=\frac{(\cos x-1)(\cos x-2)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{-(\cos x-2)}{1+\cos x}=\frac{2-\cos x}{1+\cos x}$

ج) $(1+\tan^2 x)\cos^4 x+\sin^2 x=(\frac{1}{\cos^2 x})\cos^4 x+\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

چ) $\tan^2 x-\sin^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\sin^2 x(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1)=\sin^2 x((1+\tan^2 x)-1)=\sin^2 x\tan^2 x=(\sin x\tan x)^2$

ح) $(\tan x-1)^2+(\tan x+1)^2=\tan^2 x-2\tan x+1+\tan^2 x+2\tan x+1=2\tan^2 x+2=2(\tan^2 x+1)=\dfrac{2}{\cos^2 x}$

پاسخ ۵)

$$\sin x-\cos x=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(\sin x-\cos x)^2=\frac{1}{16}\Rightarrow\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{16}\Rightarrow 1-2\sin x\cos x=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow -2\sin x\cos x=\frac{1}{16}-1=-\frac{15}{16}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{15}{32}$$

پاسخ ۶) فرض کنیم $|\sin x+\cos x|=A$ ، اکنون می‌توان نوشت: (توجه کنید که $\geq$)

$$(\sin x+\cos x)^2=A^2\Rightarrow\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=A^2\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=A^2$$

$$\xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{1}{8}}1+\frac{2}{8}=A^2\Rightarrow A^2=\frac{5}{4}\xrightarrow{A\geq 0}A=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت $|\sin x+\cos x|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

پاسخ ۷) با جای‌گذاری $2\tan\theta$ به جای x خواهیم داشت:

$$A=\sqrt{4+(2\tan\theta)^2}=\sqrt{4+4\tan^2\theta}=\sqrt{4(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{4(\frac{1}{\cos^2\theta})}=2|\frac{1}{\cos\theta}|\xrightarrow{\text{حاده است }\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$$

پاسخ ۸) **الف)** کافی است صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم کنیم:

$$A=\frac{\dfrac{2\sin x+\cos x}{\cos x}}{\dfrac{3\sin x-\cos x}{\cos x}}=\frac{2\tan x+1}{3\tan x-1}$$

اکنون با جای‌گذاری عدد ۲ به جای $\tan x$ خواهیم داشت: $A=\dfrac{4+1}{6-1}=1$

ب) کافی است صورت و مخرج عبارت B را بر $\cos^3 x$ تقسیم کنیم:

$$B=\frac{\dfrac{2\sin^3 x+\cos^3 x}{\cos^3 x}}{\dfrac{3\sin^3 x-\cos^3 x}{\cos^3 x}}=\frac{2\tan^3 x+1}{3\tan^3 x-1}$$

اکنون با جای گذاری مقدار ۲ به جای $\tan x$ ، خواهیم داشت: $B=\dfrac{2(2)^3+1}{3(2)^3-1}=\dfrac{16+1}{24-1}=\dfrac{17}{23}$

پاسخ ۹)

$$A^2+B^2=(3\sin x+4\cos x)^2+(3\cos x-4\sin x)^2$$
$$=(9\sin^2 x+24\sin x\cos x+16\cos^2 x)+(9\cos^2 x-24\sin x\cos x+16\sin^2 x)$$
$$=25\sin^2 x+25\cos^2 x=25(\sin^2 x+\cos^2 x)=25(1)=25$$

پاسخ ۱۰) ابتدا مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x=3+2\cos\theta\Rightarrow x-3=2\cos\theta\Rightarrow\frac{x-3}{2}=\cos\theta$$

$$y=-1-2\sin\theta\Rightarrow y+1=-2\sin\theta\Rightarrow\frac{y+1}{-2}=\sin\theta$$

با جای‌گذاری تساوی‌های بالا در رابطه‌ی $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ خواهیم داشت:

$$(\frac{x-۳}{۲})^۲+(\frac{y+۱}{-۲})^۲=۱\Rightarrow\frac{(x-۳)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۴}=۱$$

پاسخ ۱۱) مقادیر $\frac{۱}{\cos\theta}$ و $\tan\theta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=\frac{۳}{\cos\theta}\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{۱}{\cos\theta} \\ y=۱+۲\tan\theta\Rightarrow\frac{y-۱}{۲}=\tan\theta \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری تساوی‌های بالا در رابطه‌ی $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ خواهیم داشت:

$$۱+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=\frac{x^۲}{۹}$$

پاسخ ۱۲) می‌دانیم $\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x$ پس می‌توان نوشت:

$$A=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x\xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}}A=۱-۲(\frac{۱}{۴})^۲=۱-\frac{۲}{۱۶}=\frac{۷}{۸}$$

پاسخ ۱۳) می‌دانیم $\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x$ و $\sin^۶x+\cos^۶x=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x$ ، پس عبارت B برابر است با:

$$B=\frac{۱-۳\sin^۲x\cos^۲x}{۳}-\frac{۱-۲\sin^۲x\cos^۲x}{۲}=\frac{۱}{۳}-\sin^۲x\cos^۲x-(\frac{۱}{۲}-\sin^۲x\cos^۲x)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۶}$$

پاسخ ۱۴) ابتدا عبارت C را ساده می‌کنیم:

$$C=\frac{۱}{۱-\sin\alpha}+\frac{۱}{۱+\sin\alpha}=\frac{۱+\sin\alpha+۱-\sin\alpha}{(۱-\sin\alpha)(۱+\sin\alpha)}=\frac{۲}{۱-\sin^۲\alpha}$$

اکنون با جای‌گذاری مقدار $\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$ به جای $\sin\alpha$، خواهیم داشت:

$$C=\frac{۲}{۱-(\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}})^۲}=\frac{۲}{۱-(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

پاسخ ۱۵) ابتدا عبارت $\sin^۳\theta+\cos^۳\theta$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin^۳\theta+\cos^۳\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^۲\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^۲\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(۱-\sin\theta\cos\theta)$$

همان‌طور که می‌بینید برای محاسبه‌ی مقدار $\sin^۳\theta+\cos^۳\theta$ ، به مقادیر $\sin\theta+\cos\theta$ و $\sin\theta\cos\theta$ نیاز داریم، پس به محاسبه‌ی هر یک از این عبارات می‌پردازیم:

۱- محاسبه‌ی $\sin\theta+\cos\theta$: به کمک اتحاد $(a+b)^۲+(a-b)^۲=۲(a^۲+b^۲)$ می‌توان نوشت:

$$(\sin\theta+\cos\theta)^۲+(\sin\theta-\cos\theta)^۲=۲(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=۲\xrightarrow{\sin\theta-\cos\theta=\frac{۱}{۲}}(\sin\theta+\cos\theta)^۲+\frac{۱}{۴}=۲$$

$$\Rightarrow(\sin\theta+\cos\theta)^۲=۲-\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۴}\xrightarrow{\theta\text{ حاده است}}\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\qquad(۱)$$

۲- محاسبه‌ی $\sin\theta\cos\theta$: اگر طرفین تساوی $\sin\theta-\cos\theta=\frac{۱}{۲}$ را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت:

$$(\sin\theta-\cos\theta)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲\theta-۲\sin\theta\cos\theta+\cos^۲\theta=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow۱-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow-۲\sin\theta\cos\theta=-\frac{۱۵}{۱۶}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۱۵}{۳۲}\qquad(۲)$$

اکنون با جای‌گذاری تساوی‌های (۱) و (۲) حاصل عبارت $\sin^۳\theta+\cos^۳\theta$ برابر است با:

$$\sin^۳\theta+\cos^۳\theta=\frac{\sqrt{۷}}{۲}(۱-\frac{۱۵}{۳۲})=\frac{۱۷\sqrt{۷}}{۶۴}$$

پاسخ ۱۶) ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=۲(۱+\sin x)(۱+\cos x)=۲(۱+\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=۲+۲\sin x+۲\cos x+۲\sin x\cos x$$
$$=۱+۱+۲\sin x+۲\cos x+۲\sin x\cos x=۱+(\sin^۲ x+\cos^۲ x)+۲\sin x+۲\cos x+۲\sin x\cos x$$
$$=(۱+\sin x+\cos x)^۲$$

پاسخ ۱۷) اگر طرفین تساوی $۳\sin^۲ x-۷\cos^۲ x=-۵\sin x\cos x+\frac{۱}{۲}$ را بر $\cos^۲ x$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۳\sin^۲ x}{\cos^۲ x}-\frac{۷\cos^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{-۵\sin x\cos x}{\cos^۲ x}+\frac{۱}{۲\cos^۲ x}$$
$$\Rightarrow ۳\tan^۲ x-۷=-۵\tan x+\frac{۱}{۲}(۱+\tan^۲ x)\xrightarrow{\times ۲}۶\tan^۲ x-۱۴=-۱۰\tan x+۱+\tan^۲ x$$
$$\Rightarrow ۵\tan^۲ x+۱۰\tan x-۱۵=۰\xrightarrow{\div ۵}\tan^۲ x+۲\tan x-۳=۰\Rightarrow(\tan x+۳)(\tan x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x+۳=۰\Rightarrow\tan x=-۳ \quad \text{غ ق ق}\\ \tan x-۱=۰\Rightarrow\tan x=۱\end{cases}$$

دقت کنید که با توجه به حاده بودن x ، مقدار $\tan x$ مثبت است.

پاسخ ۱۸) با توجه به شکل می‌توان فهمید: $BD=DC=DA=a$ و فرض کنید $AM=MB=b$ همچنین می‌توان دریافت: $\overset{\Delta}{MDA}=\overset{\Delta}{BDM}$

در نتیجه $\hat{C}=M\hat{D}A$ بنابراین حاصل $\sin\hat{}$ نیز برابر $\frac{۱}{۵}$ می‌باشـد. در مثلث $\overset{\Delta}{MDB}$ حاصل $\cos\hat{}$ برابر $\frac{۱}{a}=\frac{MD}{BD}$ می‌باشـد. با توجه به این که $\sin c=\frac{۱}{۵}$ نتیجه می‌گیریم: $\cos\hat{c}=\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}$. بنابراین می‌توان چنین گفت:

$$\cos\hat{c}=\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}=\frac{۱}{a}\Rightarrow a=\frac{۵}{\sqrt{۲۴}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۶}}$$

حال می‌توان دریافت طول AC برابر با یا به‌طور معادل $\frac{۵}{\sqrt{۶}}$ می‌باشد.