فصل نهم
نامعادلات درجه‌ی اول

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۴) ابتدا نامعادله‌ی مورد نظر را حل می‌کنیم: $۲x-۳>۷-x \Rightarrow ۲x+x>۷+۳ \Rightarrow ۳x>۱۰ \xrightarrow{\div ۳} x>\frac{۱۰}{۳}$

۲- گزینه‌ی (۲) باید هریک از اعداد ۰، ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶ را در نامعادله‌ی $۵x-۱۰\leq ۱۲$ جای‌گذاری کنیم. به راحتی می‌توان فهمید اعداد ۰، ۱، ۲ و ۴ در این نامعادله صدق می‌کنند ولی اعداد ۵ و ۶ در نامعادله صدق نمی‌کنند.

۳- گزینه‌ی (۲) ابتدا نامعادله‌ی داده شده را حل می‌کنیم:

$$۵-۲x\leq ۱-x \Rightarrow x-۲x\leq ۱-۵ \Rightarrow -x\leq -۴ \Rightarrow x\geq ۴$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله باید بیانگر xهای بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد. پس گزینه‌ی (۲) درست است.

۴- گزینه‌ی (۱) کافی است عدد ۷ را با طرفین نامعادله جمع کنیم: $-۱<-۲x-۳<۱ \xrightarrow{+۷} ۶<-۲x+۴<۸$

۵- گزینه‌ی (۳) با جای‌گذاری مقدار $۲x+۳$ به جای y، خواهیم داشت: $-۳<۳+۲x<۵ \xrightarrow{-۳} -۶<۲x<۲ \xrightarrow{\div ۲} -۳<x<۱$

۶- گزینه‌ی (۱) $۵x-۷<۲x+۸ \Rightarrow ۵x-۲x<۷+۸ \Rightarrow ۳x<۱۵ \Rightarrow x<۵$

حال با توجه به این‌که x عددی طبیعی است می‌توان نتیجه گرفت مقادیر قابل قبول x می‌تواند ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد.

۷- گزینه‌ی (۴) ابتدا طرفین نامعادله را در ک.م.م مخرج‌ها، یعنی عدد ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲x+۱}{۵}-\frac{۲-x}{۳}>۱ \xrightarrow{\times ۱۵} ۳(۲x+۱)-۵(۲-x)>۱۵ \Rightarrow ۶x+۳-۱۰+۵x>۱۵ \Rightarrow ۱۱x>۲۲ \Rightarrow x>۲$$

۸- گزینه‌ی (۱) ابتدا طرفین نامعادله را در ک.م.م مخرج‌ها، یعنی عدد ۲۴ ضرب می‌کنیم:

$$۳-\frac{۳x}{۲}>\frac{۵}{۸}-\frac{۴x-۳}{۶} \xrightarrow{\times ۲۴} ۷۲-۳۶x>۱۵-۴(۴x-۳) \Rightarrow ۷۲-۳۶x>۱۵-۱۶x+۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۶x-۳۶x>۲۷-۷۲ \Rightarrow -۲۰x>-۴۵ \Rightarrow x<\frac{۴۵}{۲۰} \Rightarrow x<\frac{۹}{۴}$$

۹- گزینه‌ی (۳) باید نامعادله‌ی $۱۰<۴k+۲<۱۱۰$ را حل کنیم:

$$۱۰<۴k+۲<۱۱۰ \xrightarrow{-۲} ۸<۴k<۱۰۸ \xrightarrow{\div ۴} ۲<k<۲۷$$

با توجه به این‌که عدد k طبیعی است می‌توان نتیجه گرفت اعداد ۳، ۴، ۵، ... و ۲۶ مقادیر قابل قبول برای k هستند. پس ۲۴ عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کنند.

۱۰- گزینه‌ی (۱) برای آن‌که معادله‌ی $x^۲-۳x+m-۱=۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باید مقدار Δ منفی باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\Delta<۰ \Rightarrow ۹-۴(m-۱)<۰ \Rightarrow ۹-۴m+۴<۰ \Rightarrow -۴m<-۱۳ \Rightarrow m>\frac{۱۳}{۱۴}$$

۱۱- گزینه‌ی (۳) برای محاسبه‌ی تعداد ساعات باید نامعادله‌ی $۱/۵t+۹\leq ۴۵$ را حل کنیم:

$$۱/۵t+۹\leq ۴۵ \Rightarrow ۱/۵t\leq ۳۶ \Rightarrow t\leq ۲۴$$

بنابراین حداکثر تعداد ساعات، ۲۴ ساعت یا یک روز می‌باشد.

۱۲- گزینه‌ی (۲) توجه کنید که باید نامعادله‌ی $۰/۱۶x+۰/۲\leq ۵$ را حل کنیم. در نتیجه خواهیم داشت $۰/۱۶x\leq ۴/۸$ یا به طور معادل، $x\leq \frac{۴/۸}{۰/۱۶}=۳۰$

بنابراین حداکثر تعداد صفحات کاغذ برابر با ۳۰ می‌باشد.

۱۳- گزینه‌ی (۱) برای رسیدن به مرحله‌ی سود دهی باید درآمد کارخانه از هزینه‌ی تولید آن، بیش‌تر باشد یعنی:

$$۱۲۰n>۹۵n+۷۵۰ \Rightarrow ۲۵n>۷۵۰ \Rightarrow n>\frac{۷۵۰}{۲۵}=۳۰$$

بنابراین پس از فروش حداقل ۳۱ واحد محصول کارخانه به مرحله‌ی سود دهی می‌رسد.

۱۴- گزینه‌ی (۱) اگر جرم هر بسته کالا را با x نشان دهیم، طبق صورت مسأله، نامعادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases}۲x>۴\\ ۳x<۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۲\\ x<\frac{۸}{۳}\end{cases}\Rightarrow ۲<x<\frac{۸}{۳}$$

۱۵- گزینه‌ی (۱) تعداد خرگوش‌های محسن را با x و تعداد خرگوش‌های مجید را با y نمایش می‌دهیم. حال طبق صورت مسأله می‌توان نوشت:

$x=۲y \quad , \quad y+۱۰>x$

با توجه به این‌که تعداد خرگوش‌های مجید را می‌خواهیم، در نامعادله‌ی $x<y+۱۰$ به جای x قرار می‌دهیم $۲y$. پس داریم:

$$y+۱۰>۲y\Rightarrow ۲y-y<۱۰\Rightarrow y<۱۰$$

پس تعداد خرگوش‌های مجید کم‌تر از ۱۰ عدد است.

۱۶- گزینه‌ی (۳) اگر تعداد روزهای اقامت خانواده‌ی مریم در مشهد را با x نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$\text{هزینه‌ی سفر}\leq ۴۰۰۰۰۰\Rightarrow ۷۰۰۰۰+۳۰۰۰۰x\leq ۴۰۰۰۰۰\Rightarrow ۷+۳x\leq ۴۰\Rightarrow ۳x\leq ۳۳\Rightarrow x\leq ۱۱$$

پس، این خانواده حداکثر ۱۱ روز می‌توانند در مشهد اقامت کنند.

۱۷- گزینه‌ی (۲) ابتدا هر نامعادله را به طور جداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\frac{x-۱}{۳}<\frac{۵}{۷}\Rightarrow ۷(x-۱)<۱۵\Rightarrow ۷x-۷<۱۵\Rightarrow ۷x<۲۲\Rightarrow x<\frac{۲۲}{۷}\\ \frac{x+۴}{۳}>\frac{۵}{۷}\Rightarrow ۷(x+۴)>۱۵\Rightarrow ۷x+۲۸>۱۵\Rightarrow ۷x>-۱۳\Rightarrow x>-\frac{۱۳}{۷}\end{matrix}\Rightarrow \frac{-۱۳}{۷}<x<\frac{۲۲}{۷}$$

x می‌تواند مقادیر صحیح موجود در بازه‌ی فوق را به خود بگیرد که عبارتند از:

$\{-۱,۰,۱,۲,۳\}\to$ ۵ مقدار

۱۸- گزینه‌ی (٤) باید دو نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$۸-۲x\leq ۵-۵x\Rightarrow ۳x\leq -۳\Rightarrow x\leq -۱$$
$$۵-۵x\leq ۲۳-۲x\Rightarrow -۳x\leq ۱۸\Rightarrow x\geq -۶$$

بنابراین خواهیم داشت: $-۶\leq x\leq -۱$

۱۹- گزینه‌ی (۲) با حل نامعادله‌ی نخست داریم $x>۶$، و با حل نامعادله‌ی دوم داریم $x>۲$، اشتراک جواب این نامعادله‌ها $x>۶$ است.

۲۰- گزینه‌ی (۳) با توجه به این‌که نقطه‌ی A در ربع دوم صفحه‌ی مختصات اســت می‌توان نتیجه گرفت طول این نقطه مقداری منفی و عرض آن مقداری مثبت است. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}a+۲<۰\Rightarrow a<-۲\\ ۳-a>۰\Rightarrow a<۳\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-۲$$

۲۱- گزینه‌ی (٤) با توجه به این‌که عبارت $\frac{۲}{x}$ بین دو عدد مثبت قرار دارد می‌توان دریافت عبارت $\frac{۲}{x}$ مثبت است. از آن‌جا که سه بخش نابرابری هم علامت هستند، آن‌ها را عکس می‌کنیم:

$$\frac{۷}{۳}<\frac{x}{۲}<۴\Rightarrow \frac{۱۴}{۳}<x<۸$$

۲۲- گزینه‌ی (۳) ابتدا عبارت $\frac{۳x-۱}{x-۱}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۳x-۱}{x-۱}=\frac{۳(x-۱)+۲}{x-۱}=\frac{۳(x-۱)}{x-۱}+\frac{۲}{x-۱}=۳+\frac{۲}{x-۱}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\frac{۷}{۲}<۳+\frac{۲}{x-۱}<۵\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۲}{x-۱}<۲\xrightarrow{\frac{۲}{x-۱}>۰}\frac{۱}{۲}<\frac{x-۱}{۲}<۲\Rightarrow ۱<x-۱<۴\Rightarrow ۲<x<۵$$

۲۳- گزینه‌ی (۱) ابتدا طرف چپ نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲x^۲}{x-۱}+\frac{۴-۶x}{x-۱}=\frac{۲x^۲-۶x+۴}{x-۱}=\frac{۲(x^۲-۳x+۲)}{x-۱}=\frac{۲(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=۲(x-۲)\qquad x\neq۱$$

بنابراین مسأله تبدیل می‌شود به حل نامعادله‌ی درجه‌ی اول زیر:

$$۲(x-۲)\geq\frac{۲x+۷}{۳}-۱=\frac{۲x+۴}{۳}\Rightarrow x-۲\geq\frac{x+۲}{۳}\Rightarrow ۳x-۶\geq x+۲\Rightarrow x\geq۴$$

۲۴- گزینه‌ی (۴) توجه کنید که از ضرب فرض مسأله در عدد (-۱) جهت نابرابری معکوس می‌شود و این دلیل درستی گزینه‌ی (۴) می‌باشد. سایر گزینه‌ها را به کمک مثال‌های مناسب می‌توان رد کرد.

۲۵- گزینه‌ی (۳)

الف) اگر عددی یکسان را از دو طرف نابرابری بکاهیم جهت نابرابری تغییر نمی‌کند. ✓ $x-z>y-z$

ب) اگر عددی مثبت را در طرفین نابرابری ضرب کنیم جهت نابرابری تغییر نمی‌کند. ✓ $\frac{x}{z^۲}>\frac{y}{z^۲}$

پ) این گزاره فقط در حالتی که داشته باشیم $z>۰$، برقرار است.

۲۶- گزینه‌ی (۲) به بررسی تک‌تک گزاره‌ها می‌پردازیم:

الف) می‌دانیم $a<b$ و $-d<-c$، از جمع این نامساوی‌ها به نامساوی $a-d<b-c$ می‌رسیم. پس گزاره‌ی (الف) نادرست است.

ب) همان‌طور که در قسمت قبل بیان کردیم این حکم برقرار است.

پ) با توجه به این‌که علامت a، b، c و d را نمی‌دانیم این گزاره نادرست است.

۲۷- گزینه‌ی (۴) از نابرابری $\frac{c}{a}<۰$ نتیجه می‌گیریم که c و a مختلف‌العلامت هستند. با توجه به مثبت بودن c می‌توان دریافت a منفی است. همچنین از نابرابری $ab>۰$ نتیجه می‌گیریم که a و b هم‌علامت هستند، پس $b<۰$، لذا داریم: $c>b$

۲۸- گزینه‌ی (۲) از آن‌جا که با ضرب عددی مثبت در طرفین نابرابری، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند گزینه‌ی (۲) درست خواهد بود:

$$۰<a<۱\xrightarrow{b>۰}۰<ab<b$$

به سادگی می‌توان برای رد کردن گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) مثال‌هایی ارائه کرد.

۲۹- گزینه‌ی (۲) از اولین نابرابری به وضوح داریم $x<۰$ و از دومین نابرابری داریم $z<۰$. حال با توجه به آن‌که $xy>۰$ می‌توان نتیجه گرفت $y<۰$.

۳۰- گزینه‌ی (۲) با جمع دو نابرابری بیان شده خواهیم داشت $x+y>۲z$. (توجه کنید که اگر $z>۰$، داریم $x+y>۲z>z$ و اگر $z<۰$، خواهیم داشت $x+y>۲z>۳z>۴z$. اما تنها نابرابری که قطعاً درست می‌باشد $x+y>۲z$ است و نابرابری‌های دیگر الزاماً درست نیستند!)

۳۱- گزینه‌ی (۱) توجه کنید که از شرط دوم داریم $a=-c$ یا $b=c$ یا $c=a$. با توجه به این‌که $a<b<c$، تنها حالت قابل قبول $a=-c$ می‌باشد. توجه داشته باشید که $a=-c<c$ پس: $c>۰$

در نتیجه خواهیم داشت $-c<b<c$ و b می‌تواند مثبت یا منفی باشد، اما $b-c=b+a<۰$.

۳۲- گزینه‌ی (۱) از اولین نابرابری نتیجه می‌گیریم که a و b دارای علامت‌های متفاوت هستند. از دومین و سومین نابرابری نیز نتیجه می‌گیریم $-b<a<b$ پس b باید مثبت باشد و در نتیجه a منفی. همچنین با شرط $-b<a$ باید قرینه‌ی b نسبت به مبدأ دورتر از a قرار گیرد، پس گزینه‌ی (۱) درست می‌باشد.

۳۳- گزینه‌ی (۲) از نابرابری $a^۸b^۵<۰$ نتیجه می‌شود که با توجه به مثبت بودن $a^۸$ ، $b^۵$ و در نتیجه b منفی می‌باشد. حال از نابرابری $b^۳c^۵<۰$ نتیجه می‌شود که $c^۵$ مثبت و در نتیجه c مثبت است. حال از آن‌جا که $(ac)^۵>۰$ ، پس a و c هم علامت هستند، لذا a نیز مثبت است.

بنابراین داریم: $a>۰\quad,\quad b<۰\quad,\quad c>۰$

۳۴- گزینه‌ی (۴) ابتدا هریک از تساوی‌ها را به صورت مقابل می‌نویسیم: $x=a^{\frac{۳}{۴}}\quad,\quad y=a^{\frac{۲}{۵}}\quad,\quad z=a^{\frac{۴}{۷}}$

با توجه به این‌که $۰<a<۱$، هرچه توان a کوچک‌تر باشد عبارت بزرگ‌تر خواهد بود. حال با توجه به این‌که $\frac{۲}{۵}<\frac{۴}{۷}<\frac{۳}{۴}$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$a^{\frac{۲}{۵}}>a^{\frac{۴}{۷}}>a^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow y>z>x$$

۳۵- گزینه‌ی (۱) ابتدا طرف چپ نامساوی را به صورت $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ می‌نویسیم. حال داریم:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}<\frac{a}{c}+۱\Rightarrow\frac{b}{c}<۱\xrightarrow[\times c]{c>۰}b<c$$

۳۶- گزینه‌ی (۳) نابرابری مزبور را در عدد ۱− ضرب می‌کنیم در نتیجه خواهیم داشت: $b<۰<a$

پس a و b مختلف‌العلامت هستند، لذا $ab<۰$ همچنین از $b<a$ داریم: $b-a<۰$

ضمناً دقت کنید که $\frac{۱}{a}>۰>\frac{۱}{b}$، پس این نابرابری هم درست است.

۳۷- گزینه‌ی (۴) ابتدا c را به‌صورت $c=\frac{۲a}{b}-۳$ ساده می‌کنیم. اکنون توجه کنید که به دلیل منفی بودن b با ضرب طرفین نابرابری فرض مسأله در $(\frac{۱}{b})$ جهت نابرابری‌ها عکس می‌شود لذا $a(\frac{۱}{b})>b(\frac{۱}{b})=۱$، بنابراین $\frac{a}{b}>۱$. حال خواهیم داشت:

$$c=۲(\frac{a}{b})-۳>۲(۱)-۳=-۱$$

۳۸- گزینه‌ی (۴) به کمک خواص نامساوی‌ها داریم:

گزینه‌ی (۱): $x-y<۰\,,y>۰\Rightarrow\frac{x-y}{y}<۰$ ✓

گزینه‌ی (۲): $y-x>۰\,,x>۰\Rightarrow\frac{y-x}{x}>۰$ ✓

گزینه‌ی (۳): $\frac{x}{y}<۱\Rightarrow(\frac{x}{y})^۲<۱\Rightarrow\frac{x^۲}{y^۲}<۱$ ✓

گزینه‌ی (۴): $\frac{x+y}{x}<۱\Rightarrow\frac{x}{x}+\frac{y}{x}<۱\Rightarrow۱+\frac{y}{x}<۱\Rightarrow\frac{y}{x}<۰$ ✗

۳۹- گزینه‌ی (۴) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی (۱): می‌تواند درست یا نادرست باشد؛ به‌طور مثال فرض کنید:

$$\begin{cases}a=۱,b=۲,c=۶ & ✓\\ a=۲,b=۳,c=۴ & ✗\end{cases}$$

گزینه‌ی (۲): این گزاره نیز می‌تواند درست یا نادرست باشد، مثال‌های گزینه‌ی (۱) در این‌جا هم قابل قبول است.

گزینه‌ی (۳): این گزاره نیز می‌تواند درست یا نادرست باشد، به طور مثال:

$$\begin{cases}a=۱,b=۲,c=۶ & ✗\\ a=\frac{۱}{۶},b=۲,c=۶ & ✓\end{cases}$$

گزینه‌ی (۴): توجه کنید که $a+c>c>b$. پس جهت نابرابری عکس جهت ذکر شده می‌باشد پس گزاره نادرست است!

۴۰- گزینه‌ی (۲) ابتدا عبارت $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۲}{ab}$ را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت $(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})^۲$ می‌نویسیم.

پس باید حدود عبارت $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ را یافت که برای این منظور طرفین نابرابرهای فرض مسأله را معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲<\frac{۱}{a}\le۳\\ ۳<\frac{۱}{b}\le۵\end{cases}\Rightarrow۵<\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\le۸\Rightarrow۲۵<(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})^۲\le۶۴$$

در بین گزینه‌های داده شده، عدد ۶۸ در محدوده‌ی بالا قرار ندارد.

۴۱- گزینه‌ی (۱) ابتدا مقدار Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴a^۲=(\underbrace{b-۲a}_{>۰})(\underbrace{b+۲a}_{>۰})>۰$$

پس با توجه به این‌که همواره $\Delta>۰$، می‌توان نتیجه گرفت معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

۴۲- گزینه‌ی (۲) اگر دو نابرابری را با یک‌دیگر جمع کنیم خواهیم داشت:

$$۳x+۳y\le۱۸\Rightarrow x+y\le۶$$

پس حداکثر مقدار $x+y$ برابر ۶ است.

۴۳- گزینه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$-۵\le x\le ۱۳ \xrightarrow{\times ۲} -۱۰\le ۲x\le ۲۶$$
$$-۲\le y\le ۳ \xrightarrow{\times(-۳)} -۹\le -۳y\le ۶$$

با جمع کردن دو نامساوی بالا خواهیم داشت $-۱۹\le ۲x-۳y\le ۳۲$، پس حداکثر مقدار $۲x-۳y$ برابر ۳۲ است.

۴۴- گزینه‌ی (۳) برای تعیین حدود عبارت xy، باید از خاصیّت ضربی نابرابری‌ها استفاده کنیم, لذا علامت یکی از دو عبارت x یا y را در هر حالت ثابت می‌گیریم تا با ضرب یک عدد با علامت ثابت تغییر مشخصی در جهت نابرابری ایجاد کند، به این منظور دو حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $۰\le y<۴$ ۲) $-۴<y\le ۰$

حالت ۱) داریم $-۴<x<۳$. با ضرب y در نابرابری و با توجه به مثبت بودن آن داریم: (دقت کنید که $۳y<۱۲$ و $-۴y>-۱۶$)

$$-۱۶<-۴y<xy<۳y<۱۲$$

حالت ۲) این بار با ضرب y در نابرابری‌ها و با توجه به منفی بودن آن خواهیم داشت: (دقت کنید که $-۴y<۱۶$ و $۳y>-۱۲$)

$$-۱۲<۳y<xy<-۴y<۱۶$$

بنابراین با توجه به دو نابرابری بالا داریم: $-۱۶<xy<۱۶$

۴۵- گزینه‌ی (۳) توجه کنید که با فرض $-۳<b<-۱$ داریم $۱<b^۲<۹$، همچنین $۴<a^۲<۱۶$. حال با جمع دو نابرابری خواهیم داشت:

$$۵<a^۲+b^۲<۲۵$$

پس مقدار $a^۲+b^۲$، عددی بین ۵ و ۲۵ است.

۴۶- گزینه‌ی (۳) با فرض $-۴<x<۵$ می‌توان نتیجه گرفت: $۰\le x^۲<۲۵$

و به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت $۰\le y^۲<۱۶$. با جمع دو نابرابری $۰\le x^۲<۲۵$ و $-۱۶<-y^۲\le ۰$ خواهیم داشت: $-۱۶<x^۲-y^۲<۲۵$

لذا حداکثر مقداری که $x^۲-y^۲$ می‌تواند به خود بگیرد عددهای بسیار نزدیک به ۲۵ می‌باشد.

۴۷- گزینه‌ی (۱) با فرض $x>۵$ سعی می‌کنیم حدود هر یک از عبارات مطرح شده در گزینه‌ها را تعیین کنیم:

گزینه‌ی (۱): $x>۵\Rightarrow \frac{x}{۵}>۱$

گزینه‌ی (۲): $x>۵\Rightarrow x+۱۰>۱۵\Rightarrow \frac{۱}{x+۱۰}<\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow \frac{۱۵}{x+۱۰}<\frac{۱۵}{۱۵}=۱$

گزینه‌ی (۳): $x>۵\Rightarrow x+۱>۶\Rightarrow \frac{۱}{x+۱}<\frac{۱}{۶}\Rightarrow \frac{۵}{x+۱}<\frac{۵}{۶}<۱$

گزینه‌ی (۴): $x>۵\Rightarrow \frac{۱}{x}<\frac{۱}{۵}\Rightarrow \frac{۵}{x}<۱$

بنابراین از آن جا که عبارت مطرح شده در گزینه‌ی (۱) بیش‌تر از یک است، پس گزینه‌ی (۱) از همه بزرگ‌تر است!

۴۸- گزینه‌ی (۱) از آن‌جا که m و n دو عدد صحیح متوالی هستند و $n^۲-m^۲>۲۰>۰$، پس n از m باید بزرگ‌تر باشد، لذا $n=۱+m$. با جای‌گذاری n خواهیم داشت:

$$(m+۱)^۲-m^۲=۲m+۱>۲۰\Rightarrow m>\frac{۱۹}{۲}$$

حداقل مقدار m صادق در نابرابری، ۱۰ می‌باشد. پس n برابر با ۱۱ است، لذا: $m^۲+n^۲=۱۰^۲+۱۱^۲=۲۲۱$

۴۹- گزینه‌ی (۱) می‌دانیم برای آن‌که عددی مضرب ۱۰ باشد باید در تجزیه‌ی آن عوامل ۲ و ۵ حضور داشته باشند. پس باید توان‌های ۲ و ۵ مثبت باشند. لذا می‌توان نوشت:

$$n-۱>۰\Rightarrow n>۱ \quad , \quad ۱۳-n>۰\Rightarrow n<۱۳$$

از دو نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم $۱<n<۱۳$ که با توجه به طبیعی بودن n، مقادیر ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ قابل قبول هستند. پس ۱۱ مقدار برای n وجود دارد.

۵۰- گزینه‌ی (۲) از تفاضل M و N کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} M-N&=a^۲(b-c)+b^۲(c-a)+c^۲(a-b)\\ &=a^۲(b-c)+b^۲(c-a)-c^۲((b-c)+(c-a))\\ &=(b-c)(a^۲-c^۲)+(c-a)(b^۲-c^۲)\\ &=(b-c)(a-c)((a+c)-b-c)=\underbrace{(a-b)}_{+}\underbrace{(b-c)}_{+}\underbrace{(a-c)}_{+}>۰\Rightarrow M-N>۰\Rightarrow M>N \end{aligned}$$

۵۱- گزینه‌ی (۲) توجه کنید که بزرگ‌ترین مجموع دوتایی میان عددهای a، b، c و d ، $c+d$ و کوچک‌ترین آن‌ها $a+b$ می‌باشد، پس کسر $\frac{c+d}{a+b}$ بزرگ‌ترین مقدار میان کسرهاست!

۵۲- گزینه‌ی (۴) توجه کنید که $۶=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{۱}{zx}+\frac{۱}{yz}+\frac{۱}{xy}$ در نتیجه: $x+y+z=۶xyz$

حال این مقدار را برای $x+y+z$ در دومین شرط که یک نابرابری است جای‌گذاری می‌کنیم: $۳۶(xyz)^۲\leq ۱۸xyz\Rightarrow xyz\leq\frac{۱}{۲}$

۵۳- گزینه‌ی (۴) فرض کنید $A=\frac{x+y}{x-y}$، واضح است که همواره داریم $(x>y)$ پس $A>۰$ در نتیجه:

$$A+۱=\frac{x+y}{x-y}+۱=\frac{۲x}{x+y}=\frac{۲}{۱+\frac{y}{x}}$$

بنابراین باید حدود کسر $\left(\frac{y}{x}\right)$ را تعیین کنیم؛ با ضرب دو نابرابری داریم:

$$\begin{cases}۱\leq y\leq ۲\\ \frac{۱}{۱۰}\leq\frac{۱}{x}\leq\frac{۱}{۴}\end{cases}\xrightarrow{\text{ضرب}}\frac{۱}{۱۰}\leq\frac{y}{x}\leq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱۱}{۱۰}\leq ۱+\frac{y}{x}\leq\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۲}{۳}\leq\frac{۱}{۱+\frac{y}{x}}\leq\frac{۱۰}{۱۱}\Rightarrow\frac{۴}{۳}\leq\frac{۲}{۱+\frac{y}{x}}\leq\frac{۲۰}{۱۱}\Rightarrow\frac{۴}{۳}\leq A+۱\leq\frac{۲۰}{۱۱}\Rightarrow\frac{۱}{۳}\leq A\leq\frac{۹}{۱۱}$$

پس حداقل مقدار A، برابر با $\frac{۱}{۳}$ و حداکثر مقدار آن $\frac{۹}{۱۱}$ می‌باشد، پس حاصل جمع آن‌ها برابر است با: $\frac{۱}{۳}+\frac{۹}{۱۱}=\frac{۳۸}{۳۳}$

۵۴- گزینه‌ی (۴) توجه کنید که می‌دانیم $\frac{۱}{a}>\frac{۱}{b}>\frac{۱}{c}$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{c}<\frac{۱}{a}\quad,\quad\frac{۲}{b}<\frac{۲}{a}$$

با جمع دو نابرابری فوق نابرابری $\frac{۱}{c}+\frac{۲}{b}<\frac{۳}{a}$ حاصل می‌شود. حال اگر طرفین نابرابری اخیر را با $\frac{۱}{a}$ جمع کنیم داریم:

$$۱=\frac{۱}{a}+\frac{۲}{b}+\frac{۱}{c}<\frac{۴}{a}\Rightarrow ۱<\frac{۴}{a}\Rightarrow a<۴$$

پس a نمی‌تواند بیش‌تر یا مساوی ۴ باشد. همچنین توجه کنید که با توجه به مثبت بودن a، b و c کسرهای $\frac{۱}{a}$ و $\frac{۲}{b}$ و $\frac{۱}{c}$ هم مثبت هستند و از آن‌جا که جمع آن‌ها برابر با ۱ شده، پس هر سه کم‌تر از ۱ هستند. بنابراین $\frac{۱}{a}<۱\Rightarrow a>۱$. در نتیجه: $۱<a<۴$